Détermination des éléments les plus vitaux pour le problème d'affectation

Cristina Bazgan, Sonia Toubaline, Daniel Vanderpooten

Université Paris-Dauphine, LAMSADE, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France

{Cristina.Bazgan, Sonia.Toubaline, Daniel.Vanderpooten}@dauphine.fr

Mots-Clés : *arêtes les plus vitales, affectation, complexité, résolution exacte.*

Dans une problématique de sécurité ou de fiabilité, il est important d'évaluer la capacité d'un système à résister à une destruction ou panne d'un certain nombre d'entités qui le composent. Il s'agit alors d'identifier les entités critiques du système. La criticité d'un ensemble d'entités peut être appréhendée en regard d'une mesure de performance ou d'un coût de fonctionnement du système. Dans de nombreux contextes, un système peut être modélisé par un graphe valué dont les arcs ou les arêtes constituent les entités (liaisons d'un réseau, possibilités d'affectation,...). Une façon de formuler la recherche d'un ensemble d'entités critiques consiste à identifier, parmi tous les sous-ensembles de k arcs ou arêtes, un sous-ensemble dont la suppression engendre la plus forte dégradation de la mesure de performance ou du coût de fonctionnement du système. Cette problématique, référencée dans la littérature sous le nom de k Most Vital Arcs ou k Most Vital Edges, a été étudiée pour différents problèmes classiques de graphe : arbre couvrant minimal [2, 4, 6], plus court chemin [1, 3]... Nous nous intéressons ici à cette problématique pour le problème de l'affectation minimale, problème appelé dans la suite k Most Vital Edges Assignment.

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti, connexe, valué où V est une bipartition des sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 avec $V = V_1 \cup V_2$ et $|V_1| = |V_2| = n$. Le problème k Most Vital Edges Assignment consiste à déterminer un sous-ensemble d'arêtes $S^* \subseteq E$ avec $|S^*| = k$ qui maximise la valeur de l'affectation minimale dans le graphe $G(V, E \backslash S^*)$. Pour k constant, ce problème est évidemment polynomial. En particulier, pour $k = 1$, Hung *et al.* [5] proposent un algorithme exact en $O(n^3)$ pour déterminer l'arête la plus vitale. Pour k non constant, nous montrons que le problème k Most Vital Edges Assignment est *NP*-difficile au sens fort et non approximable à 2 près, à moins que *P*=*NP*. Nous proposons également pour résoudre ce problème, un algorithme exact en $O(n^{k+2})$.

Nous nous intéressons aussi à une variante complémentaire de la problématique précédente, variante référencée dans la littérature sous le nom de Minimum Edges blocker. Celle-ci consiste à déterminer un sous-ensemble d'arêtes de taille minimale dont la suppression engendre un coût supérieur à une valeur fixée. Cette problématique a été étudiée pour les problèmes de plus court chemin [3] et de couplage maximum [7]. Nous considérons le problème Minimum Edges blocker Assignment qui revient à trouver un sous-ensemble $S^* \subseteq E$, de taille minimale telle que la valeur d'une affectation minimale dans le graphe $G = (V, E \backslash S^*)$ soit supérieure à un entier donné. Nous montrons que Minimum Edges blocker Assignment est *NP*-difficile au sens fort et non approximable à 1,16 près, à moins que *P*=*NP*. Nous exploitons également l'algorithme précédent afin de résoudre ce problème.

En conclusion, nous discutons la version généralisée du problème k Most Vital Edges Assignment où un coût de suppression est associé à chaque arête du graphe. Cette version consiste à trouver un sous-ensemble d'arêtes à supprimer, dont le coût de suppression n'excède pas un coût total fixé, de façon à maximiser la valeur d'une affectation minimale dans le graphe résiduel.

Références

[1] A. Bar-Noy, S. Khuller and B. Schieber. The complexity of finding most vital arcs and nodes. Technical Report CS-TR-3539, Department of Computer Science, University of Maryland, 1995

[2] C. Bazgan, S. Toubaline and D. Vanderpooten. Détermination des k arêtes les plus vitales pour le problème de l'arbre couvrant minimal. *Dans les actes de la 10ème Conférence de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF 09)*, 2009

[3] L. Khachiyan, E. Boros, K. Borys, K. Elbassioni, V. Gurvich, G. Rudolf and J. Zhao. On short paths interdiction problems : total and node-wise limited interdiction. *Theory of Computing Systems*, 43(2):204-233, 2008

[4] G.N. Frederickson and R. Solis-Oba. Increasing the weight of minimum spanning trees. *Proceedings of the seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 539-546, 1996

[5] C. N. Hung, L. H. Hsu and T. Y. Sung. The most vital edges of matching in a bipartite graph. *Networks*, 23(4):309-313, 1993

[6] W. Liang. Finding the k most vital edges with respect to minimum spanning trees for fixed k. *Discrete Applied Mathematics*, 113(2-3):319-327, 2001

[7] R. Zenklusen, B. Ries, C. Picouleau, D. de Werra, M. Costa and C. Bentz. Blockers and Transversals. *Discrete Mathematics*, 309(13):4306-4314, 2009