Algorithme exact pour le problème du cycle Hamiltonien avec minimisation des labels et deux variantes

Nicolas Jozefowiez[1,2], Gilbert Laporte[3], Frédéric Semet[4]

[1] CNRS ; LAAS ; 7 avenue du colonel Roche, F-31077 Toulouse, France.
nicolas.jozefowiez@laas.fr
[2] Université de Toulouse ; UPS, INSA, INP, ISAE ; LAAS ; F-31077 Toulouse, France.
[3] CIRRELT, HEC-Montréal, 3000 Chemin de la Côte-Sainte-Catherine, Montréal, QC, Canada H3T 2A7.
gilbert@crt.umontreal.ca
[4] LAGIS, Ecole Centrale de Lille - Cité Scientifique - BP48 - 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.
frederic.semet@ec-lille.fr

Mots-Clés : *Problème de minimisation de labels, problème du voyageur de commerce, algorithme de séparations et coupes.*

Le Problème du Cycle Hamiltonien avec Minimisation des Labels (PCHML) se définit sur un graphe orienté non pondéré $G = (V, E)$ avec V l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. On note $\delta(e)$ le label associé à $e \in E$ et C l'ensemble de tous les labels. Le but est de trouver un cycle Hamiltonien qui utilise le moins de labels possible. Un label $k \in C$ est dit utilié si une arête $e \in \zeta(k)$ se trouve dans le cycle, avec $\zeta(k) = \{e \in E | \delta(e) = k\}$. Le PCHML a été introduit et résolu heuristiquement par Cerulli et al. [1] et Xiong et al. [3].

Nous définissons aussi deux variantes qui sont obtenues en considérant un graphe pondéré et la longueur du cycle soit comme une contrainte soit comme un objectif. La première variante, le Problème du Cycle Hamiltonien avec Minimisation des Labels et Contrainte sur la Longueur (PCHMLCL), cherche un cycle Hamiltonien minimisant le nombre de labels utilisés en fixant une longueur maximale pour le cycle. La seconde variante, le Problème du Voyageur de Commerce avec Contrainte sur les Labels (PVCCL), minimise la longeur du cycle en imposant une borne sur le nombre de labels utilisés.

Le PCHML peut se modéliser en suivant le modèle pour le Problème du Voyageur de Commerce (PVC) de Dantzig et al. [2]. Soit x_e des variables binaires valant 1 si et seulement si $e \in E$ se trouve dans le cycle et u_k des variables binaires valant 1 si et seulement si $k \in C$ est utilisé. Le problème est alors :

$$\min \quad \sum_{k \in C} u_k \tag{1}$$

$$\sum_{e \in \omega(\{i\})} x_e = 2 \qquad (i \in V) \tag{2}$$

$$\sum_{e \in \omega(S)} x_e \geq 2 \qquad (S \subset V, 3 \leq |S| \leq |V| - 3) \tag{3}$$

$$x_e \leq u_{\delta(e)} \qquad (e \in E) \tag{4}$$

$$x_e \in \{0, 1\} \qquad (e \in E) \tag{5}$$

$$u_k \in \{0,1\} \quad (k \in C), \tag{6}$$

où $\omega(S) = \{e = (i,j) \in E | i \in S, j \in V \setminus S\}$. Les contraintes (2) et (3) sont les contraintes de degré et de connectivité classiques du PVC. Les contraintes (4) assure que si une arête avec un label k est utilisée alors le label est compté dans la fonction objectif (1). Un modèle pour le PCHMLCL s'obtient en ajoutant la contrainte $\sum_{e\in E} c_e x_e \leq m$, tandis que pour le PVCCL, il faut remplacer l'objectif (1) par min $\sum_{e\in E} c_e x_e$ et ajouter la contrainte $\sum_{k\in C} u_k \leq m$.

Les modèles peuvent être renforcés par la contrainte $u_k \leq \sum_{e\in\zeta(k)} x_e$ $(k \in C)$ qui force l'utilisation d'une arête labellisée par k si ce dernier est utilisé. D'autres inégalités valides sont obtenues à partir des deux propositions suivantes :

Proposition 1 *Soit $T \subseteq E$. Si la contrainte $\sum_{e\in T} \alpha_e x_e \leq \beta$, est valide pour le PVC, alors pour un label $k \in C$, l'inégalité $\sum_{e\in T\cap\zeta(k)} \alpha_e x_e \leq \beta u_k$ est valide pour le PCHML, le PCHMLCL et le PVCCL.*

Proposition 2 *Soit $T \subseteq E$. Si l'inégalité $\sum_{e\in T} \alpha_e x_e \geq \beta$ est valide pour le PVC, alors l'inégalité $\sum_{k\in C} \min\{\sum_{e\in T\cap\zeta(k)} \alpha_e, \beta\} u_k \geq \beta$ est valide pour le PCHML, le PCHMLCL et le PVCCL.*

Pour résoudre ces trois problèmes, un algorithme de séparations et coupes a été développé. L'algorithme suit le schéma standard. Excepté le programme linéaire utilisé pour calculer la borne inférieure et les heuristiques pour calculer la borne supérieure initiale, l'algorithme est le même pour les trois problèmes en ce qui concerne la génération de coupes et les branchements. Le sous-problème initial est obtenu en relachant les contraintes de connectivité, qui serviront de coupe, et les contraintes d'intégrité du modèle et en ajoutant plusieurs inégalités valides qui ont été identifiées. Des heuristiques ont aussi été développées pour le PCHMLCL et PVCCL. Le principe des heuristiques est de résoudre une relaxation du problème où l'on ne garde que l'intégrité sur les variables liées aux labels. La solution obtenue est alors utilisée pour induire un sous-graphe sur lequel un PVC est résolu. L'algorithme a été testé sur des instances générées ainsi que sur des instances de la TSPLIB modifiées.

Références

[1] R. Cerulli, P. Dell'Olmo, M. Gentili et A. Raiconi. Heuristics approaches for the minimum labelling Hamiltonian cycle problem. *Electronic Notes on Discrete Mathematics*, 25:131–138, 2006.

[2] G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson et S. M. Johnson. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Operations Research*, 2:393–410, 1954.

[3] Y. Xiong, B. L. Golden et E. A. Wasil. The colorful traveling salesman problem. Dans E. K. Baker, A. Joseph, A. Mehrotra et M. A. Trick (éditeurs), *Extending the Horizons : Advances in Computing, Optimization, and Decision Techniques*, p. 115–123, Springer, 2007.