

# Une méthode exacte pour la résolution du problème des règles de Golomb

Sylvain Boussier<sup>1</sup>, Carlos Diego Rodrigues<sup>1</sup>, Philippe Michelon<sup>1</sup>, Thierry Mautor<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LIA, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, France

{sylvain.boussier, Carlos-Diego.Rodrigues, Philippe.Michelon}@univ-avignon.fr

<sup>2</sup> PRISM, Université de Versailles Saint-Quentin, France

Thierry.Mautor@prism.uvsq.fr

**Mots-Clés :** Règles de Golomb, Méthode exacte, Backtracking

## 1 Introduction

Une règle de Golomb d'ordre  $n$  est un ensemble d'entiers positifs distincts  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n$  appelés *marques* tels que toutes les différences  $x_j - x_i$  pour  $j > i$  soient distinctes. Le problème des règles de Golomb consiste à trouver une règle de Golomb de valeur  $x_n$  minimale (voir fig. 1).

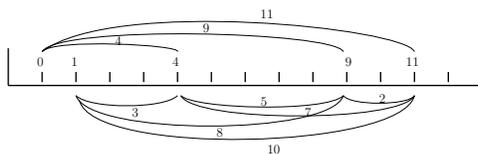


FIGURE 1 – Une règle de Golomb optimale d'ordre 5.

De nombreuses études ont porté sur la résolution de ce problème [5, 1] et il a été récemment montré que le problème de décision associé est NP-complet [3]. Nous proposons ici de nouveaux éléments pour sa résolution exacte. A partir d'un algorithme de type *Backtracking* nous proposons deux techniques de calcul de bornes permettant de réduire significativement le nombre de noeuds et le temps de calcul nécessaires à la résolution d'instances difficiles. De plus, nous proposons une méthode de diversification qui, expérimentalement, permet de trouver rapidement de bonnes solutions réalisables. En pratique, notre algorithme est parvenu à trouver des règles de Golomb optimales jusqu'à  $n = 18$ .

## 2 Contributions

Le principe de notre algorithme est d'énumérer l'ensemble des règles de Golomb pour les marques  $x_0, \dots, x_{n-1}$  et de conserver la règle de plus petite valeur  $x_n$  trouvée. Une règle est représentée par une configuration  $u \in \{0, \dots, \bar{l}_n, *\}^n$  des variables de décision  $x_i$  telle que  $\bar{l}_n$  est une borne supérieure sur la longueur  $l_n^*$  d'une règle de Golomb optimale,  $u_i = x_i$  si  $x_i$  est fixée et  $u_i = *$  sinon. Les marques sont positionnées séquentiellement et à chaque itération nous cherchons deux valeurs  $\underline{s}_i$  et  $\bar{s}_i$  de manière à réduire au mieux l'intervalle dans lequel peut être placée la marque courante ( $\underline{s}_i \leq u_i \leq \bar{s}_i$ ).

**Réduction de la borne supérieure :** Une première amélioration porte sur le calcul de la borne supérieure  $\bar{l}_n$ . Cette technique est basée sur l'observation que la plus petite valeur qu'elle peut prendre doit être une valeur réalisable et doit donc respecter les contraintes du problème. A chaque noeud, la borne supérieure peut être réduite tant qu'au moins une des distances entre cette borne et les marques placées sur la règle est déjà utilisée. Au lieu de réduire la borne d'une unité à chaque itération, nous montrons qu'il est possible d'améliorer cette réduction en considérant seulement des valeurs intermédiaires réalisables. La technique proposée présente l'intérêt de réduire significativement cette borne tout en ayant un coût faible en termes de complexité algorithmique.

**Amélioration de la réduction de la position maximale :** Cette deuxième amélioration est basée sur l'observation que la distance entre la position maximale d'une marque et la borne supérieure ne doit pas être utilisée par la règle courante. Nous présentons une manière simple et algorithmiquement efficace de réduire la position maximale  $\bar{s}_i$  pour la variable courante  $x_i$ .

**Diversification de la recherche :** Notre algorithme a une stratégie d'exploration simple : à chaque marque, il branche sur la valeur minimale non explorée qui respecte les contraintes du problème puis continue sur la marque suivante. Bien que ce choix semble être un « bon » choix, les solutions optimales du problème ne suivent pas cette règle pour  $n \geq 5$ . Pour remédier à cela, nous avons implanté une procédure permettant d'explorer uniquement un nombre limité de noeuds pour chaque branchement : lorsque ce nombre est atteint, la recherche s'arrête et passe au branchement suivant. Afin de conserver la complétude, ce processus est réitéré jusqu'à avoir complètement exploré l'espace de recherche. Cette technique permet expérimentalement d'obtenir de bonnes solutions réalisables rapidement et de réduire le temps d'exécution global.

### 3 Résultats expérimentaux

Nous avons comparé les résultats obtenus par notre algorithme avec ceux des approches connues de la littérature [4, 2]. Nous montrons que les améliorations que nous avons apportées permettent de réduire significativement le nombre de noeuds et le temps de calcul pour l'ensemble des instances testées. De plus, nos améliorations peuvent aisément être adaptées à toute recherche arborescente comme la méthode *Garsp* proposée par Rankin et Garry [4] actuellement utilisée par un projet de calcul distribué<sup>1</sup> visant à résoudre le problème pour  $n = 26$ .

### Références

- [1] A. Dollas, W. T. Rankin, and D. McCracken. A new algorithm for golomb ruler derivation and proof of the 19 mark ruler. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44 :379–382, 1998.
- [2] S. C. Hoa. Construction de règles de golomb optimales. Master's thesis, Département de mathématiques et de génie industriel, École polytechnique de Montréal, 1999.
- [3] C. Meyer and P. A. Papakonstantinou. On the complexity of constructing golomb rulers. *Discrete Applied Mathematics*, 157 :738–748, 2009.
- [4] W. T. Rankin. Optimal golomb rulers : An exhaustive parallel search implementation. Master's thesis, Duke University, Department of Electrical Engineering, 1993.
- [5] J. B. Shearer. Some new optimum golomb rulers. *IEEE trans. Inform. Theory*, IT-13 :106–113, 1987.

---

1. <http://www.distributed.net>