Affectation de ressources équitable et robuste grâce à un modèle multi-critères*

E. Medernach[1,2] E. Sanlaville[2,3]

[1] Laboratoire de Physique Corpusculaire, Campus des Cézeaux, 63177 AUBIERE Cedex
[2] LIMOS, Campus des Cézeaux, 63173 AUBIERE Cedex
[3] LITIS, Université du Havre, 76640 Le Havre
medernac@clermont.in2p3.fr , Eric.Sanlaville@univ-lehavre.fr

Mots-Clés : affectation de ressources, robustesse, équité, optimisation multi-critères, scénarios

Dans cette présentation, nous considérons un problème d'allocation de ressources. Ces ressources sont disponibles en quantité limitée et attribuées à au plus un utilisateur de façon permanente. Le problème a deux caractéristiques spécifiques. D'une part, les utilisateurs sont tous de même importance et doivent être traités de la manière la plus équitable possible. D'autre part, les demandes des utilisateurs ne sont pas toutes connues au départ mais arrivent au fil de l'eau et doivent être traitées dès leur apparition. Ce type de problème d'affectation apparaît en particulier dans les domaines suivants : affectation de bande passante dans un réseau, gestion d'une grille de calcul. Dans le second cas, les ressources sont soit de l'espace de stockage, soit des unités de calcul. Dans les deux exemples, on retrouve à la fois des demandes arrivant en ligne, et la nécessité d'un traitement équitable des utilisateurs. Un site sera délaissée par ses utilisateurs si ceux-ci ont le sentiment de ne pas être traités équitablement. Nous considérons que le comportement des utilisateurs peut être prédit dans une certaine mesure. Le modèle choisi est celui d'un nombre fini de scénarios pour les arrivées des demandes. Notre approche est proactive car elle construit hors ligne des politiques d'affectation |emrobustes.

Equité, Robustesse et Modèle multi-critères

On considère n utilisateurs en concurrence pour m machines (terme générique signifiant ici une unité de ressource). Chaque utilisateur a les mêmes droits et exige une répartition équitable de ces ressources. Une affectation est un n-vecteur d'entiers positifs, indicé par les utilisateurs. L'objectif est de comparer 2 affectations en terme d'équité. Pour cela nous commençons par définir la notion d'ordre équitable par les deux propriétés :

- impartialité : L'évaluation d'une allocation ne dépend pas de celui qui reçoit.
- équilibre : Soient u_i et u_j deux utilisateurs tels que u_i reçoit moins que u_j. Dimininuer l'affectation de u_i résulte en une allocation moins équitable, quelle que soit l'augmentation des machines allouées à u_j.

Un premier résultat [3] est que le seul ordre équitable est l'ordre Leximin (noté $\prec_{Lex}$) : ordre lexicographique sur les vecteurs triés [4]. C'est un ordre total sur $\mathbb{R}^n$ à une permutation près et il respecte le principe d'efficacité : soit$\prec_c$ l'ordre coordonnées par coordonnées, on a : $V \prec_c V' \Rightarrow V \prec_{Lex} V'$.

*Ce travail a bénéficié d'une aide de l'ANR portant la référence ANR-08-BLAN-0331-01 (projet RobOCoop)

Un vecteur des demandes est noté $V \in \mathbb{N}^n$. Une affectation réalisable pour V est un vecteur $A \in \mathbb{N}^n$ tel que $A \prec_c V$. Un événement est l'arrivée de demandes supplémentaires, le vecteur de demandes est donc croissant coordonnées par coordonnées. Le problème en ligne est défini par un ensemble de scenarios. Un scenario est une suite de vecteurs de demande, croissante pour $\prec_c$ et qui correspond à une suite d'événements pouvant se produire. L'ensemble de tous les scenarios $\mathbb{S}$ peut être représenté par un arbre $\mathbb{T}$, appelé arbre des scénarios. Une politique d'affectation associe à chaque sommet de l'arbre des scénarios une affectation réalisable. Les affectations sur un chemin de $\mathbb{T}$ sont croissantes pour $\prec_c$.

Il est bien sûr illusoire de chercher une politique qui soit optimale pour l'équité sur chaque sommet de l'arbre. Aussi nous considérons l'équité sur chaque sommet comme un critère particulier, ce qui ramène à un problème d'optimisation multicritères dont on peut chercher les optima de Pareto (voir [2] pour une discussion générale sur cette approche). Notons POE l'ensemble des politiques Pareto Optimales relativement à $\prec_{Lex}$. Nous cherchons à construire cet ensemble. Le gestionnaire pourra ensuite, suivant ses préférences, choisir l'une ou l'autre de ces politiques non dominées.

Algorithme de calcul du front de Pareto

Nous avons conçu un algorithme efficace énumérant les politiques POE pour tout arbre de scénarios. Cet algorithme est itératif : A chaque sommet de l'arbre, il construit un ensemble de politiques partielles à partir des politiques déjà obtenues pour le noeud parent, grâce à l'algorithme de Water-Filling [1] adapté. Nous montrons des propriétés des politiques POE, qui permettent de limiter le nombre de politiques construites. La complexité de l'algorithme est $\mathcal{O}(m \cdot n \cdot r \cdot NBPol)$, avec r le nombre de sommets de l'arbre, et $NBPol$ le nombre de politiques construites. En particulier, dans le cas où l'arbre est en fait une chaîne, toutes les politiques construites sont bien Pareto optimales pour l'équité. L'algorithme est alors de complexité minimale. Il existe cependant des cas où le nombre même de politiques Pareto optimales pour les chaînes est exponentiel en m.
Lors de la présentation nous présenterons en détail cet algorithme et les principaux résultats qui fondent sa correction.

Références

[1] Bertsekas, D.and R. Gallager, R. Data Networks. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1992).

[2] Hites, R. De Smet, Y. Risse, N. Salazar-Neumann, M. and Vincke, P. About the applicability of MCDA to some robustness problems. European Journal of Operational Research, vol. 174, number 1, pages 322-332 (2006).

[3] Moulin, H. Axioms of Cooperative Decision Making (Econometric Society Monographs), Cambridge University Press (1988).

[4] Yager, R. R. and Kacprzyk, J. The ordered weighted averaging operators : theory and applications, Kluwer Academic Publishers, 1997.