

Résolution parallèle de l'affectation quadratique à 3 dimensions

Bertrand Le Cun¹, François Galea^{1,2}

¹ Laboratoire PRiSM; Université de Versailles–Saint Quentin; 45 av. Etats-Unis,
F-78035 Versailles Cedex, France
{fgalea,blec}@prism.uvsq.fr

² Laboratoire G-SCOP; 46, av. Félix Viallet, F-38031 Grenoble Cedex 1, France

Mots-Clés : *affectation quadratique, branch-and-bound, parallélisme.*

1 Introduction

L'évolution actuelle des ordinateurs permet la résolution exacte de problèmes NP-complets de taille de plus en plus grande, même avec une seule machine. En effet les machines actuelles peuvent intégrer plusieurs processeurs qui eux-même sont dotés de plusieurs coeurs. De plus, ils incluent des fonctionnalités de vectorisation qui permettent à chaque coeur d'effectuer certains calculs sur plusieurs données simultanément. Le parallélisme induit par l'aspect multi-coeur d'une part et le calcul vectoriel d'autre part implique de concevoir des logiciels de calcul tenant compte de ces fonctionnalités.

2 Présentation du problème

Le problème d'affectation quadratique à trois dimensions (Q3AP) est une extension du problème d'affectation quadratique (QAP), qui occupe une large place dans la littérature d'Optimisation Combinatoire. Le Q3AP a été présenté par P. Hahn *et al.* [1]. La motivation principale a été l'optimisation d'un schéma de retransmission sur réseau sans fil, en affectant des symboles de modulation à des séquences binaires de taille fixe. Des erreurs de transmission pouvant avoir lieu, les paquets erronés sont susceptibles d'être retransmis. La diversité est une mesure de l'indépendance statistique entre une transmission et les éventuelles retransmission successives. Maximiser la diversité revient à réduire la probabilité d'erreurs lors des retransmissions. Comme présenté par P. Hahn *et al.*, lorsque l'on considère qu'une seule retransmission, ce problème revient à un QAP. Le Q3AP correspond à au cas de deux retransmissions.

Une autre illustration de ce problème peut être faite en reprenant les termes du QAP. Etant donnés N managers, N usines, et N sites, le problème consiste à affecter chaque manager et chaque usine à chaque site, de telle sorte à minimiser le coût total. Le coût d'une affectation est la somme de coûts linéaires L_{ijk} où i est le manager, j l'usine et k le site plus les coûts quadratiques C_{ijklmn} où i et l sont des managers, j et m des usines et k et n des sites. Plus formellement le problème se modélise

comme suit :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ijk} x_{ijk} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^N \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^N C_{ijklmn} x_{ijk} x_{lmn} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N x_{ijk} = 1 && \forall i \in \{1, \dots, N\} \\
& \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N x_{ijk} = 1 && \forall i \in \{1, \dots, N\} \\
& \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_{ijk} = 1 && \forall i \in \{1, \dots, N\} \\
& x_{ijk} \in \{0, 1\} && \forall i, j, k \in \{1, \dots, N\}
\end{aligned}$$

3 Résolution exacte par branch-and-bound

Notre méthode de résolution exacte est un algorithme *branch-and-bound*, que nous avons implémenté sur l’environnement Bob++[3]. Bob++ est un ensemble de briques logicielles facilitant le développement de solveurs parallèles basés sur des méthodes de recherche arborescentes.

La borne inférieure employée est un algorithme de type *dual-ascent* et fait usage d’une borne inférieure pour l’affectation linéaire en trois dimensions (3AP), qui consiste en une succession d’opérations dans un “cube” ou matrice à trois dimensions. Parmi ces opérations figurent la recherche du minimum dans un plan du cube, et l’addition d’une constante sur tous les coefficients d’un plan. Ces opérations sont grandement accélérées en utilisant des opérations vectorielles.

Notre solveur utilise l’environnement parallèle *multithread* de Bob++, permettant le traitement de noeuds de l’arbre *branch-and-bound* en parallèle par les différents coeurs de la machine. L’exécution sur une station de travail à huit coeurs nous a permis d’atteindre des facteurs d’accélération très proches du nombre de coeurs. De plus, le calcul de la borne 3AP fait usage autant que possible des possibilités vectorielles offertes par les processeurs de la famille Intel x86 (technologie SSE2), permettant d’atteindre des facteurs d’accélération globale de l’ordre de 1,5.

Références

- [1] P. Hahn, K. Bum-Jin, T. Stutzle, S. Kanthak, W. L. Hightower, H. Samra, Z. Ding, and M. Guignard. The quadratic three-dimensional assignment problem : Exact and approximate solution methods. *European Journal of Operational Research*, 184(2) :416–428, 2008.
- [2] F. Galea and B. Le Cun. Bob++ : a Framework for Exact Combinatorial Optimization Methods on Parallel Machines. In *PGCO’2007 as part of the 2007 International Conference High Performance Computing & Simulation (HPCS’07) and in conjunction with The 21st European Conference on Modeling and Simulation (EC MS 2007)*, pages 779–785, June 2007.
- [3] Bob++ : Framework to solve Combinatorial Optimization Problems
<http://bobpp.prism.uvsq.fr/>.
- [4] P. Hahn and T. Grant. Lower bounds for the quadratic assignment problem based upon a dual formulation. *Operations Research*, 46 :912–922, 1998.