Le sandwich line-graph

Denis Cornaz[1], Philippe Meurdesoif[2]

[1] LAMSADE ; Université Paris-Dauphine ; Place du Mal de Lattre de Tassigny 75775 Paris CEDEX 16
cornaz@lamsade.dauphine.fr
[2] IMB ; Université Bordeaux 1 ; 351, cours de la Libération ; F-33405 Talence cedex
Philippe.Meurdesoif@u-bordeaux1.fr

Mots-Clés : *coloration de graphe, clique, stable, line-graph.*

1 Introduction

Soit G un graphe simple non-orienté avec $V(G)$ pour ensemble de sommets et $E(G)$ pour ensemble d'arêtes. On note $\alpha(G)$ la taille maximum d'un stable de G et $\overline{\chi}(G)$ le nombre minimum de cliques couvrant G, remarquons que si $\overline{G}$ désigne le graphe complémentaire de G, alors $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ où ici $\omega(G)$ est la taille maximum d'une clique de G, et notons que $\overline{\chi}(G) = \chi(\overline{G})$ où $\chi(G)$ est le nombre chromatique de G. Un paramètre de graphe $\beta(\cdot)$ est dit *sandwich* s'il satisfait $\alpha(G) \leq \beta(G) \leq \overline{\chi}(G)$ (ce qui équivaut à $\omega(G) \leq \beta(\overline{G}) \leq \chi(G)$) pour tout graphe G. Le *line-graphe* $L(G)$ *de* G a pour ensemble de sommets $V(L(G)) = E(G)$, et son ensemble d'arêtes est l'ensemble des paires d'arêtes adjacentes dans G. Lorsque G est sans triangle on peut observer que le line-graphe $L(G)$ de G a la propriété "sandwich" suivante :

$$\alpha(L(G)) + \overline{\chi}(G) = |V(G)| = \alpha(G) + \overline{\chi}(L(G)).$$

Cette propriété des line-graphes des graphes sans triangle est dite "sandwich" car elle imlique directement que

$$\alpha(G) \leq |V(G)| - \beta(L(G)) \leq \overline{\chi}(G)$$

pour tout paramètre sandwich de graphe $\beta(\cdot)$. Cette observation permet ainsi de transformer tout paramètre sandwich en un autre pour les graphes sans triangle.

Prenons l'exemple de la fonction Theta-Lovász et du graphe sans triangle $10C_5$ qui est composé de dix 5-cycles disjoints. La fonction Theta-Lovász $\vartheta(G)$ d'un graphe G vérifie $\alpha(G) \leq \vartheta(G) \leq \overline{\chi}(G)$ et elle peut se calculer en temps polynomial (à ε près) (voir [3]). En particulier, ϑ permet de calculer ω et χ lorsque $\omega = \chi$ (*e.g.* les graphes parfaits) et il n'existe à ce jour pas d'algorithme combinatoire pour le faire (ϑ se calcule par la programmation semidéfinie positive). On a $\alpha(10C_5) = 20$ et $\overline{\chi}(10C_5) = 30$. La fonction Theta nous donne $\vartheta(10C_5) = 22.36$ (elle est souvent proche de α [3]). Mais puisque le line-graphe de $10C_5$ est encore $10C_5$ on a comme autre paramètre sandwich $|V(10C_5)| - \vartheta(L(10C_5)) = 50 - \vartheta(10C_5) = 27.64$ qui est beaucoup plus proche de $\overline{\chi}$.

Nous montrerons que le graphe aux arêtes introduit dans [1] a la propriété "sandwich" du line-graphe **mais pour tout graphe** avec ou sans triangle et qu'il permet, en utilisant la fonction Theta-Lovász, d'obtenir de meilleures bornes inférieures pour la coloration de graphe.

2 Le sandwich line-graphe

Définition 1 *Soit $\vec{G}$ un graphe orienté. Une paire $\{e, f\}$ d'arcs adjacents est dite* simpliciale *si $e = (u, v)$ et $f = (u, w)$, et si v et w sont adjacents dans $\vec{G}$.*

Théorème 1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté et soit $\vec{G} = (V, A)$ une orientation acyclique quelconque de G. Si $S(\vec{G})$ est le graphe avec pour ensemble de sommets $V(S(\vec{G})) = A$ et où deux sommets sont adjacents dans $S(\vec{G})$ si et seulement si ils correspondent à une paire* **non-simpliciale** *d'arcs adjacents de $\vec{G}$, alors*

$$\alpha(S(\vec{G})) + \overline{\chi}(G) = |V(G)| = \alpha(G) + \overline{\chi}(S(\vec{G})). \tag{1}$$

Preuve : La première égalité dans (1) a été prouvée dans [1]. Donc nous n'avons qu'à montrer la seconde. Remarquons que cette seconde égalité est équivalent à $\overline{\chi}(S(\vec{G})) = \tau(G)$, où $\tau(G)$ est la cardinalité minimum d'un transversal T de G, c'est-à-dire un ensemble $T \subseteq V$ tel que toute arête de G a au-moins un sommet dans T. En effet, puisque $|V(G)| = \alpha(G) + \tau(G)$ par l'indentité bien connue de Gallai.

Soit $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_r\}$ une partition de l'ensemble des sommets de $S(\vec{G})$ telle que tout K_i est une clique de $S(\vec{G})$. Puisque K_i est une clique de $S(\vec{G})$, il en découle qu'il existe un sommet v_i de G tel que tout sommet de K_i correspond à une arête de G incidente à v_i, pour $i = 1, \ldots, r$. Sinon $\vec{G}$ aurait un triangle orienté, ce qui est impossible puique qu'il est acyclique. Puisque $\mathcal{K}$ est une partition par cliques, alors $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est un transversal de G. D'où $\overline{\chi}(S(\vec{G})) \geq \tau(G)$.

Soit T un transversal de G. Pour tout $v \in T$, soit $\delta_T(v)$ l'ensemble des arcs e de $\vec{G}$ dont v est la tête, où telles que v est la queue de e mais que e n'a pas sa tête dans T. Puisque T est un transversal de G, tout arc de $\vec{G}$ appartient à $\delta_T(v)$ pour un certain $v \in T$. De plus, $\delta_T(v)$ est une clique de $S(\vec{G})$. Donc $\{\delta_T(v) : v \in T\}$ est une partition en cliques de $S(\vec{G})$, et ainsi $\overline{\chi}(S(\vec{G})) \leq \tau(G)$. □

Corollaire 1 *Si $\beta(G)$ est un paramètre de graphe tel que $\alpha(G) \leq \beta(G) \leq \overline{\chi}(G)$ pour tout graphe G, alors $\alpha(G) \leq |V(G)| - \beta(S(\vec{G})) \leq \overline{\chi}(G)$ pour tout orientation acyclique $\vec{G}$ de G.*

Preuve : Comme $\alpha(S(\vec{G})) \leq \beta(S(\vec{G}))$, alors $|V(G)| - \beta(S(\vec{G})) \leq \overline{\chi}(G)$. Comme $\beta(S(\vec{G})) \leq \overline{\chi}(S(\vec{G}))$, alors $\alpha(G) \leq |V(G)| - \beta(S(\vec{G}))$. □

Corollaire 2 *Pour tout graphe non-orienté G, notons $S^0(\vec{G}) = G$ et définissons $S^{i+1}(\vec{G}) := S(\vec{S}^i(\vec{G}))$ où $\vec{S}^i(\vec{G})$ est une orientation acyclique arbitrairement choisie de $S^i(\vec{G})$. Si $\beta(G)$ est un paramètre de graphe tel que $\alpha(G) \leq \beta(G) \leq \overline{\chi}(G)$ pour tout graphe G, alors*

$$\alpha(G) \leq (-1)^k \beta(S^k(\vec{G})) - \sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^{i+1} |V(S^i(\vec{G}))| \leq \overline{\chi}(G) \text{ pour tout entier } k. \tag{2}$$

Preuve : Il suffit d'appliquer récursivement le Corollaire 1. □

3 Expérimentations et conclusion

Nous notons $\Phi_\vartheta(G)$ le nombre obtenu à partir de G en choisissant une orientation acyclique $\vec{G}$ de G, en évaluant la fonction Theta-Lovász ϑ sur $S(\vec{G})$ et en retournant $|V(G)| - \vartheta(S(\vec{G}))$. Bien sûr, Φ_ϑ n'est donc ainsi pas uniquement défini mais est seulement défini à un choix d'orientation acyclique près. Dans nos expérimentations, pour chaque graphe testé, nous avons choisi aléatoirement 20 orientations acycliques, on note $\min \Phi_\vartheta$ (resp. $\max \Phi_\vartheta$) la valeur minimum (resp. maximum) et meanΦ_ϑ la moyenne.

Le tableau suivant montre des expérimentations sur les graphes My_k de Mycielski [2] ; ces graphes ont été crées pour être les plus difficiles pour la coloration de graphe, ils vérifient $\alpha(My_k) = 2$ et $\overline{\chi}(My_k) = k$.

	$\|V\|$	$\|E\|$	ϑ	$\overline{\chi}_f$	$\min \Phi_\vartheta$	meanΦ_ϑ	$\max \Phi_\vartheta$
My_3	5	5	2.236	2.5	–	2.764	–
My_4	11	20	2.400	2.9	3.024	3.054	3.088
My_5	23	71	2.529	3.245	3.200	3.228	3.274
My_6	47	236	2.639	3.553	3.326	3.372	3.417

Le tableau suivant montre des expérimentations avec des graphes uniformément aléatoires en variant la densité *dens* et en prenant la moyenne sur 20 graphes d'une même densité.

$\|V\|$	*dens*	ϑ	$\min \Phi_\vartheta$	meanΦ_ϑ	$\max \Phi_\vartheta$
9	0.5	3.22	3.58	3.65	3.71
10	0.5	3.28	3.61	3.66	3.70
10	0.3	4.24	4.60	4.69	4.76
15	0.3	5.43	5.90	5.94	5.98

En conclusion, au niveau de la coloration de graphe, l'évaluation de la fonction Theta-Lovász semble être plus intéressante sur le sandwich line-graphe que sur le graphe original. Nous conjecturons qu'elle est en effet toujours meilleure.

Références

[1] D. Cornaz, V. Jost : A one-to-one correspondence between colorings and stable sets, *Operations Research Letters 36* pp 673-676, (2008)

[2] M. Larsen, J. Propp, and D. Ullman. The fractional chromatic number of Mycielski's graphs, *J. Graph Theory, 19(3)* pp 411-416 (1995)

[3] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2003).