d-bloqueurs et d-transversaux des stables maximums de graphes bipartis

M.-C. Costa[1], D. de Werra[2], C. Picouleau[3]

[1] ENSTA-UMA-CEDRIC, Paris (France)
Marie-Christine.Costa@ensta.fr
[2] EPFL, Lausanne (Suisse)
dominique.dewerra@epfl.ch
[3] Laboratoire CEDRIC, CNAM, Paris (France)
chp@cnam.fr

Mots-Clés : *graphe biparti, stable maximum, couplage maximum*

1 Introduction et définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté ; nous notons $|V| = n$, $|E| = m$. $\mu(G)$ et $\alpha(G)$ sont les cardinalités maximales d'un couplage, d'un ensemble stable, respectivement. Nous définissons $\mathcal{S} = \{S|S \subset V \text{ est un stable}, |S| = \alpha(G)\}$ l'ensemble des ensembles stables maximums, et $\xi(G) = \{v \in V|v \in S \ \forall S \in \mathcal{S}\}$ l'ensemble des sommets appartenant à tout stable maximum.

Nous définissons un d-bloqueur comme un ensemble de sommets $B \subset V$ tel que le graphe G' induit par les sommets de $V \setminus B$ satisfait $\alpha(G') \leq \alpha(G) - d$ et un d-transversal comme un ensemble de sommets $T \subset V$ tel que $|S \cap T| \geq d$ pour tout stable maximum $S \in \mathcal{S}$. Un d-bloqueur (resp. d-transversal) est dit minimum lorsque sa cardinalité est minimale. Pour $d = 1$ un d-bloqueur (resp. d-transversal) est appelé bloqueur (resp. transversal). Ainsi un transversal correspond à un transversal de l'hypergraphe des stables maximums de G. Nous notons $\beta_d(G)$ (resp. $\tau_d(G)$) la cardinatité minimale d'un d-bloqueur (resp. d-transversal).

Dans [2] Boros et al. montrent que déterminer un bloqueur minimum des stables maximums d'un graphe est un problème $\mathcal{NP}$-complet. Dans [3] Ries, et al. et dans [4] Zenklusen et al., les auteurs étudient les d-bloqueurs et d-transversaux des couplages maximums de graphes bipartis ; un couplage correspondant à un ensemble stable dans le graphe aux arêtes (line graph)[1] les résultats obtenus se transposent directement pour les d-bloqueurs et d-transversaux des stables maximums : les problèmes du 1-bloqueur minimum et du 1-transversal minimum sont $\mathcal{NP}$-complets dans le cas de graphes aux arêtes de graphes bipartis et deviennent polynomiaux pour les graphes aux arêtes d'arbres ou de grilles.

Les problèmes étant $\mathcal{NP}$-complets, nous étudions ici les d-bloqueurs et d-transversaux des stables maximums lorsque G est un graphe biparti.

2 Propriétés et résultats

La propriété suivante établit certains liens existant entre d-bloqueurs et d-transversaux :

Proposition 1 *Dans un graphe biparti G :*

1. *$\forall d \geq 1$ un d-bloqueur est un d-transversal ; ainsi $\beta_d(G) \leq \tau_d(G)$*
2. *un 1-transversal est un 1-bloqueur ; ainsi $\beta_1(G) = \tau_1(G)$*
3. *$\forall d > 1$ il existe des d-transversaux qui ne sont pas des d-bloqueurs.*

Les deux propriétés suivantes établissent la complexité algorithmique de la recherche de d-bloqueurs et d-transversaux minimums :

Proposition 2 *Dans un graphe biparti G,* $\tau_d(G) = \begin{cases} d & \text{si } d \leq \xi(G) \\ 2d - \xi(G) & \text{si } \xi(G) < d \leq \alpha(G) \end{cases}$

De plus un d-transversal minimum est obtenu avec un algorithme de complexité $O(n^{\frac{3}{2}})$.

Proposition 3 *Dans un graphe biparti G,* $\beta_d(G) = \begin{cases} d & \text{si } d \leq n - 2\mu(G) \\ 2d - n + 2\mu(G) & \text{si } n - 2\mu(G) < d \leq \alpha(G) \end{cases}$

De plus un d-bloqueur minimum est obtenu avec un algorithme de complexité $O(n^{\frac{3}{2}})$.

Ces deux résultats sont obtenus en utilisant une décomposition particulière du graphe G. Cette décomposition est construite à partir d'un couplage maximum de G.

En utilisant cette décomposition et la proposition 2 nous pouvons également déterminer la cardinalité des d-transversaux minimums des couvertures minimums d'un graphe biparti avec un algorithme de complexité $O(n^{\frac{3}{2}})$.

Références

[1] C. Berge, *Graphes*, Gauthier-Villars, (Paris, 1983).

[2] E. Boros, M.C. Golumbic, V.E. Levit (2002), *On the number of vertices belonging to all maximum stable sets of a graph*, Discrete Applied Mathematics 124 (1), 17-25.

[3] B. Ries, C. Bentz, C. Picouleau, D. de Werra, M.-C. Costa, R. Zenklusen (2010), *Blockers and Transversals in some subclasses of bipartite graphs : when caterpillars are dancing on a grid*, Discrete Mathematics, 310(1), 132-146.

[4] R. Zenklusen, B. Ries, C. Picouleau, D. de Werra, M.-C. Costa, C. Bentz (2009), *Blockers and Transversals*, Discrete Mathematics, 309(13), 4306-4314.