

# Problème de partage équitable de biens indivisibles : un modèle générique et trois applications réelles

Charles Lumet, Sylvain Bouveret, Michel Lemaître

Onera-DTIM/DCSD. 2, av. Édouard Belin, 31055 TOULOUSE Cedex 4.

{prenom.nom}@onera.fr

**Mots-Clés** : *partage, allocation de ressources, équité.*

Le problème du partage équitable de biens ou de ressources entre des agents (individus, entités, ...) a de nombreuses applications réelles. Notre contribution concerne le problème de partage équitable de biens indivisibles. Nous présenterons un modèle général et trois applications réelles de ce problème, issues de domaines très différents.

Les données d'un problème de partage équitable sont : (1) un ensemble fini d'*objets*, constituant la ressource à partager ; (2) un ensemble fini d'*agents*, lesquels expriment des *préférences* sur les objets ; (3) un ensemble fini de *contraintes* (physiques, légales, morales...), définissant l'ensemble des partages admissibles. La solution d'une instance d'un tel problème est une allocation des biens aux agents satisfaisant les contraintes et optimisant un critère à choisir. De nombreux critères sont envisageables, mais ils doivent refléter un compromis nécessaire entre efficacité (ne pas sous-utiliser la ressource pour satisfaire au mieux les préférences des agents) — et équité (faire en sorte que les agents soient équitablement satisfaits).

**Allocation de sujets de travaux expérimentaux** Il s'agit d'allouer des sujets de travaux à des élèves. Ceux-ci sont répartis en binômes, chaque binôme devant recevoir deux sujets (un pour chaque semestre de l'année scolaire). Chaque binôme exprime ses préférences par un ordre strict total sur l'ensemble des sujets.

Les caractéristiques de ce problème sont les suivantes : les agents sont les binômes, les objets à allouer sont les sujets, et les contraintes sont d'ordre pratique (impossibilité d'allouer un sujet donné au deuxième semestre par exemple) ou portent sur la diversification des matières. Des critères tels que le maximin, le leximin ou des OWA particuliers sont pertinents ici, étant donnée l'exigence d'équité de la solution. La résolution doit être réalisée tous les ans (de manière centralisée), et les contraintes temporelles sont quasi inexistantes (de l'ordre de quelques jours entre l'expression des préférences et la production d'une solution). La taille caractéristique du problème est d'une quarantaine de sujets alloués à une trentaine de binômes.

**Allocation de fréquences** Une nouvelle génération de satellites de communication se met en place pour délivrer de manière interactive aux utilisateurs finaux des contenus multimédia. On doit gérer un ensemble de canaux de communications en liaison montante depuis des serveurs jusqu'aux satellites, et en liaison descendante des satellites aux utilisateurs finaux. Les porteuses utilisées sont très sensibles aux conditions météorologiques, qui peuvent beaucoup affecter le débit des communications. Il faut donc sans cesse ajuster l'affectation des créneaux de communication aux porteuses

de manière à assurer une qualité de service minimale ainsi qu'une répartition équitable des services, tout en tenant compte de priorités. On pourra trouver dans les travaux de Del Re *et al.* (2008) [2] une application assez similaire.

Dans ce problème, les agents impliqués sont les applications communicantes. Les objets à allouer sont les couples (créneaux temporels de communication (*timeslots*), porteuses). Les contraintes physiques concernent la capacité maximale des porteuses, et le fait que l'on veuille allouer une qualité de service minimale pour chaque application (ce qui se traduit par des contraintes sur le nombre minimal de créneaux de temps à affecter à chaque type d'applications). Les applications ont différentes priorités, dont il faut tenir compte dans le critère d'équité. L'allocation doit être calculée toutes les 10 secondes et le partage est répété dans le temps. Une trentaine d'applications et 220 porteuses constituent un ordre de grandeur réaliste de la taille du problème.

**Planification de satellites d'observation de la Terre [1]** Le problème concerne l'exploitation commune, par plusieurs agents (pays, organismes internationaux. . .), d'une constellation de satellites d'observation de la Terre. La mission de ce type de satellites consiste à prendre des photographies de la Terre, en réponse à des demandes déposées par des agents. L'activité de la constellation est organisée par intervalles de temps successifs, généralement 24 heures. Les agents déposent, auprès d'un centre d'exploitation commun, des demandes de photographie valables pour un jour donné. Le centre d'exploitation choisit, parmi celles-ci, l'ensemble des demandes satisfaites, c'est-à-dire l'ensemble des photographies prises chaque jour par la constellation. Les contraintes physiques d'exploitation sont telles qu'il est impossible, en général, de satisfaire simultanément toutes les demandes déposées pour un jour donné. Autrement dit, seul un sous-ensemble des demandes pourra être satisfait. Les demandes d'un agent peuvent être d'importances inégales (priorités). Une exploitation équitable est recherchée, sachant que les contributions des agents au financement de la constellation sont inégales. On recherche aussi une exploitation efficace, c'est-à-dire ne sous-exploitant pas la constellation. Il y a plusieurs centaines de demandes candidates chaque jour, seule une centaine environ peuvent être programmées. Des compensations sont possibles d'un jour à l'autre pour corriger les imperfections d'équité.

Dans ce problème, les agents impliqués sont les différents pays financeurs de la constellation, ayant des droits inégaux sur la ressource, en rapport avec le montant financé. Les objets à allouer sont les créneaux temporels d'observation. Les contraintes physiques concernent les créneaux de visibilité et les transitions entre observations à respecter. Des critères réalistes pour cette application sont la somme de puissances paramétrée, ou le critère de Nash. L'allocation doit être effectuée deux fois par jour (les compensations temporelles sont possibles), de manière centralisée, en moins d'une demi-heure de calcul. Entre 3 et 6 agents déposant chaque jour plusieurs centaines de demandes (dont entre 100 et 200 seulement peuvent être satisfaites) constituent un ordre de grandeur réaliste de la taille du problème.

## Références

- [1] Michel Lemaître, Gérard Verfaillie, and Nicolas Bataille. Exploiting a common property resource under a fairness constraint : a case study. In Thomas Dean, editor, *Proceedings of the 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-99)*, pages 206–211, Stockholm, Sweden, July 1999. Morgan Kaufmann.
- [2] Enrico Del Re, Gherardo Gorni, Luca Simone Ronga, and Maria Ángeles Vázquez-Castro. A game theory approach for dvb-rcts resource allocation. In *Proceedings of the 67th IEEE Vehicular Technology Conference, VTC Spring 2008*, pages 2937–2941, Singapore, May 2008. IEEE.