Programmation Non-Linéaire Mixte sous contraintes "On/Off" : analyse de convexité et applications

HIJAZI Hassan[1,2*], BONAMI Pierre[2*] , CORNUEJOLS Gerard[2†], OUOROU Adam[1]

[1] Orange Labs R&D ; CORE-MCN ; 38-40 rue du Général Leclerc, 92794 Issy-Les-Moulineaux cedex 9, France
hassan.hijazi@orange-ftgroup.com
[2] Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille ; Universté de la Méditerranée ; Parc Scientifique et Technologique de Luminy, 163 avenue de Luminy - Case 901, F-13288 Marseille Cedex 9, France

Dans le cadre de la Programmation Non-Linéaire Mixte, nous rencontrons fréquemment des contraintes de type "on/off". Une contrainte est dite "on/off" si une variable booléenne lui est associée, cette contrainte doit alors être satisfaite si et seulement si la variable correspondante vaut 1. Nous nous intéressons à l'ensemble simple défini par une seule contrainte "on/off" avec variables bornées. Étant donné les fonctions convexes fermées $g : \mathbb{R}^{n+K} \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^{n+K} \to \mathbb{R}$ et $f^k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall k \in \{1,\ 2, ..., K\}$, on s'intéresse aux problèmes d'optimisation de la forme :

$$\begin{aligned} & \min\ h(x,z) \\ t.q.\quad & g(x,z) \leq 0 \\ & f^k(x) \leq 0 \text{ if } z_k\ =\ 1,\ \forall k \in \{1,\ 2, ..., K\} \\ & l_i \leq x_i \leq u_i,\ \forall i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\} \\ & x \in \mathbb{R}^n, z_k \in \{0,1\},\ \forall k \in \{1,\ 2, ..., K\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Chaque $f^k(x) \leq 0$ représente une contrainte "on/off", avec z_k la variable booléenne correspondante. les contraintes $g(x,z) \leq 0$, quant à elles, regroupent les contraintes convexes restantes. Les bornes sur les variables sont supposées finies.
La présence des contraintes de types "on/off" rend le problème (1) difficile. De telles contraintes définissent un ensemble réalisable non convexe, plus précisément une union de

*Subvention ANR ANR06-BLAN-0375.
†Subvention NSF CMMI0653419, Subvention ONR N00014-03-1-0133 et Subvention ANR ANR06-BLAN-0375.

deux ensembles disjoints Γ_0 et Γ_1. Il est nécessaire de reformuler ces contraintes en vue de résoudre le modèle mathématique sous-jacent par un solveur mathématique quelconque.
Une façon de modéliser (1) en tant que PNLM convexe serait d'introduire des contraintes classiques de type big-M conduisant à une formulation compacte et facile à résoudre, offrant néanmoins une relaxation continue de qualité relativement mauvaise.
Une autre alternative consisterait à utiliser la Programmation Disjonctive afin d'écrire explicitement l'enveloppe convexe de $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Cependant, cette caractérisation définie dans un espace de dimension supérieur conduit à un programme non-linéaire de grande taille.
Ces formulations étant pratiquement désavantageuses, on introduit dans ce travail des modèles définis dans des espaces de dimensions réduites. Sous des hypothèses spécifiques sur les fonctions non-linéaires définissant nos ensembles, on montre que l'enveloppe convexe peut être caractérisée dans l'espace des variables d'origine. Une première application, puisée du monde des télécommunications, consiste à étudier des problèmes de routage sous contraintes de délais multiples. Tandis que les problèmes classiques de routages imposent une contrainte de délai moyen sur l'ensemble du réseau, notre modèle permet de prendre en compte un délai de bout en bout propre à chaque type de demande. Grâce à cette propriété, un opérateur bénéficiant de ces outils est en mesure de garantir une "qualité de service différentiée" à ses clients.
Plusieurs tests numériques sur des réseaux réels aussi bien que sur des instances aléatoires, comparant l'ensemble des modèles, permettent d'attester l'efficacité des nouvelles formulations.

Mots-Clés : *Programmation Non-Linéaire Mixte, contraintes on/off, contraintes disjonctives, programmation convexe, problème de routage, contrainte de délai, qualité de service différentiée.*