Un modèle biniveau stochastique pour la tarification de réseau : formulation et algorithme de résolution

Patrice Marcotte[1], Sharouhz Mirzaalizadeh[2], Gilles Savard[2]

[1] Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal
C.P. 6128, Succursale Centre-Ville, Montréal (QC) Canada H3C 3J7
marcotte@iro.umontreal.ca

[2] Département de mathématiques et génie industriel, École Polytechnique (Montréal)
C.P. 6079, Succursale Centre-Ville, Montréal (QC) Canada H3C 3A7
{shahrouhz.mirzaalizadeh, gilles.savard}@polymtl.ca

Mots-Clés : *programmation à deux niveaux, programmation stochastique, tarification.*

1 Introduction

La gestion du revenu, une discipline visant à optimiser les revenus d'entreprises caractérisées par des coûts d'investissement élevés et des coûts d'opération marginaux faibles, prend une place de plus en plus importante dans le milieu de la recherche opérationnelle. Dans cette présentation, nous aborderons le problème consistant à établir des tarifs optimaux sur les arcs d'un réseau, dans un contexte stochastique. La situation se prête naturellement à une modélisation sous forme de programme mathématique à deux niveaux, où le meneur cherche à maximiser son revenu, et les usagers à minimiser leur coût de transport. Ce travail reprend et généralise le modèle de tarification introduit par Labbé, Marcotte et Savard [1], tout en le situant dans le cadre de la programmation stochastique avec contraintes d'équilibre proposé pour la première fois par Patriksson et Wynter [2]. Le cadre d'analyse peut également être perçu comme une généralisation de celui de la programmation stochastique avec recours (voir Birge et Louveaux [3] par exemple).

2 Présentation du problème

Soient t un vecteur de prix, x un vecteur de flots tarifés, y un vecteur de flots non soumis aux tarifs, et $X = \{Ax + By = b, (x, y) \geq 0\}$ le polyèdre de flots compatibles avec la demande b. La formulation «classique» du problème de taxation à deux niveaux prend la forme

$$\max_t \; tx$$

où x est la solution optimale du programme linéaire paramétré en t :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & (c+t)x + dy \\ \text{s.c.} \quad & Ax + By = b \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Nous considérons une extension de ce modèle au contexte de la programmation stochastique sur deux étapes (ou «périodes»), qui s'exprime comme

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x} & tx + E_\xi[\Phi(t,\xi)] \\ \\ \min\limits_{x,y} & (c+t)x + dy \\ \text{s.c.} & Ax + By = b \\ & x, y \geq 0, \end{array}$$

où, pour chaque réalisation ω de la variable aléatoire ξ, la fonction de recours Φ est obtenue en résolvant le programme mathématique à deux niveaux :

$$\begin{array}{rll} \Phi(t,\xi) = & \max\limits_{t'(\omega)\in\Pi(t)} & t'(\omega)x'(\omega) \\ \\ & \min\limits_{x'(\omega),y'(\omega)} & (c+t'(\omega))x'(\omega) + d(\omega)y'(\omega) \\ & \text{s.c.} & Ax'(\omega) + By'(\omega) = b(\omega) \\ & & x'(\omega), y'(\omega) \geq 0, \end{array}$$

et où l'ensemble de contraintes $\Pi(t)$ lie les tarifs des deux périodes de la planification. Par exemple, les tarifs de la seconde période pourraient être contraints à ne pas excéder d'un pourcentage préétabli ceux de la première période.

Nous étudierons plusieurs scénarios compatibles avec cette formulation. Plus précisément, nous exposerons les propriétés théoriques du modèle et proposerons des algorithmes de résolution pour lesquels des résultats numériques seront présentés. En particulier, nous évaluerons l'impact des contraintes liant les tarifs aux deux périodes sur la difficulté de résolution du programme stochastique à deux niveaux.

Références

[1] M. Labbé, P. Marcotte and G. Savard. A bilevel model of taxation and its application to optimal highway pricing. *Management Science*, 44:1608–1622, 1998.

[2] M. Patriksson and L. Wynter. Stochastic mathematical programs with equilibrium constraints. *Operations Research Letters*, 25:159–167, 1998.

[3] J. R. Birge and F. Louveaux. *Introduction to stochastic programming*, Springer-Verlag, 1997.