

# Etude de problèmes combinatoires sur les fasciagraphes

Marwane BOUZNIF, Julien MONCEL, Myriam PREISSMANN

Laboratoire G-SCOP ; Université Joseph Fourier, Grenoble INP, CNRS ; 46, avenue Félix Viallet, 38031  
Grenoble Cedex 1, France

{marwane.bouznif,julien.moncel,myriam.preissmann}@g-scop.fr

**Mots-Clés** : optimisation combinatoire, grilles, fasciagraphes, rotagraphes, complexité algorithmique, problèmes NP-Complets.

**Introduction** : Nous présentons les résultats que nous avons obtenus concernant l'impact des fortes contraintes structurelles des fasciagraphes sur la complexité des problèmes combinatoires. Les fasciagraphes ont été utilisés pour résoudre différents problèmes issus de la chimie des polymères [1]. De plus ils constituent une classe de graphes qui généralise les grilles, ces dernières étant largement répandues dans la littérature, notamment afin de représenter les modèles d'interconnexion de multiprocesseurs dans les systèmes VLSI.

**Fasciagraphes** : Un fasciagraphe est une suite de copies d'un graphe, chacune des copies étant connectée à la suivante par un ensemble d'arêtes défini selon un schéma fixé (voir figure 1). Plus formellement nous définissons un fasciagraphe de la façon suivante : étant donné un entier  $n$ , et un graphe mixte  $M = (V, E, A)$ , où  $V$  est un ensemble de sommets,  $E$  est un ensemble d'arêtes sur  $V$ , et  $A$  un ensemble d'arcs sur  $V$ , le fasciagraphe  $\psi_n(M)$  est le graphe non orienté tel que

- l'ensemble des sommets est  $V(\psi_n(M)) = \bigcup_{i=0}^{n-1} V_i$  où  $V_i = \{v_i \text{ tel que } v \in V\}$  pour  $0 \leq i \leq n-1$
- l'ensemble des arêtes est  $E(\psi_n(M)) = \bigcup_{i=0}^{n-1} E_i \cup \bigcup_{j=0}^{n-2} A_j$  où  $E_i = \{u_i v_i \text{ tel que } uv \in E\}$  pour  $0 \leq i \leq n-1$  et  $A_j = \{u_j v_{j+1} \text{ tel que } (u, v) \in A\}$  pour  $0 \leq j \leq n-2$

Le sous-graphe  $(V_i, E_i)$  de  $\psi_n(M)$  est appelé la  $i$ -ème fibre du fasciagraphe.

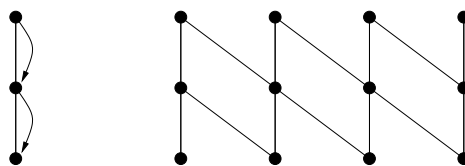


FIGURE 1 – Exemple d'un graphe mixte  $M = (V, E, A)$  et du fasciagraphe  $\psi_4(M)$  associé

Il y a de nombreux problèmes  $\mathcal{NP}$ -Complets dans le cas général pour lesquels il existe néanmoins un algorithme de résolution exécutable en temps constant sur l'ensemble des fasciagraphes construits sur un même graphe mixte.

**Exemple** : Le problème de la 3-coloration. Décider si un graphe donné  $G$  possède une coloration des sommets, utilisant 3 couleurs seulement et telle qu'il n'y ait pas deux sommets de mêmes couleurs qui soient adjacents, est un problème  $\mathcal{NP}$ -Complet dans le cas général. Cependant il existe un algorithme permettant de résoudre ce problème en temps constant sur l'ensemble des fasciagraphes construits sur un même graphe mixte. Nous décrivons ci-dessous le principe de cet algorithme.

Soit un graphe mixte  $M = (V, E, A)$ . Nous commençons par générer de façon exhaustive toutes les 3-colorations propres de  $\psi_2(M)$  (cette partie de l'algorithme s'exécute en préprocess et son temps

de calcul est indépendant de  $n$ ). Soit  $S$  l'ensemble des 3-colorations de  $\psi_2(M)$ . Si  $S$  est vide alors il n'existe aucune valeur  $n$  telle que  $\psi_n(M)$  soit 3-coloriable. Dans le cas contraire on construit un graphe orienté  $\mathcal{G}$  dont l'ensemble des sommets contient  $S$  et tel que deux éléments  $x$  et  $y$  de  $S$  sont reliés par un arc de  $x$  à  $y$  si et seulement si  $x$  colorie la deuxième fibre de  $\psi_2(M)$  de la même manière que  $y$  colorie la première (voir figure 2). On rajoute de plus deux sommets  $s$  et  $t$  et les arcs  $(s, x)$  et  $(x, t)$  pour tout  $x$  dans  $S$ . Remarquons que la création du graphe orienté  $\mathcal{G}$  s'exécute en un temps indépendant de  $n$ .

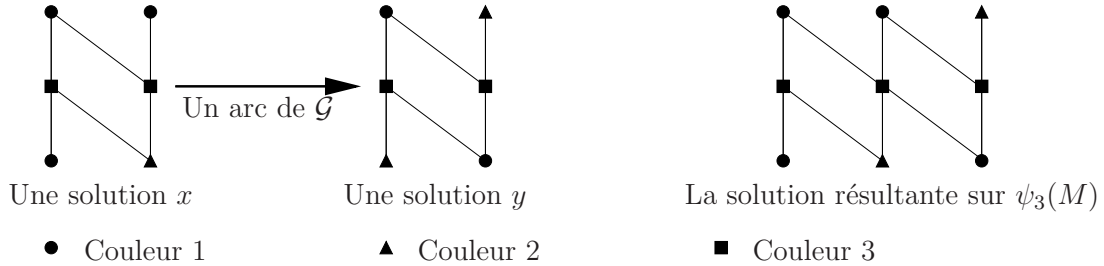


FIGURE 2 – Exemple d'un arc de  $\mathcal{G}$  et d'une solution construite sur  $\psi_3(M)$ .

Pour tout arc  $(x, y)$ , on peut remarquer qu'il est simple de construire une 3-coloration propre de  $\psi_3(M)$  en coloriant les deux premières fibres de  $\psi_3(M)$  de la même façon que celles de la solution  $x$  et en coloriant la dernière fibre de  $\psi_3(M)$  de la même façon que la seconde fibre de la solution  $y$  (voir figure 2).

Il n'est pas difficile de vérifier que plus généralement, pour tout entier  $n$ , il existe une 3-coloration du fasciagraphe  $\psi_n(M)$  si et seulement si il existe un chemin de longueur  $n$  (contenant  $n+1$  sommets) de  $s$  à  $t$  dans le graphe orienté  $\mathcal{G}$ .

En étudiant les puissances de la matrice d'adjacence du graphe orienté  $\mathcal{G}$ , il nous est possible de déterminer en un temps indépendant de  $n$  s'il existe ou non un chemin entre  $s$  et  $t$  dans  $\mathcal{G}$  de longueur exactement  $n$ . Ainsi, à graphe mixte  $M$  fixé, il existe bien une méthode dont le temps d'exécution est constant permettant de savoir si un fasciagraphe  $\psi_n(M)$  est 3-coloriable et ce pour tout  $n$ .

**Conclusion :** En généralisant les résultats de [2], [3] et [4], nous montrons que ce type de méthode est applicable à une large famille de problèmes contenant plusieurs problèmes  $\mathcal{NP}$ -Complets dans le cas général tels que dominant parfait,  $k$ -coloration,  $(2, 1)$ -labelling...

## Références

- [1] Martin Juvan, Bojan Mohar, Ante Graovac, Sandi Klavžar, and Janez Žerovnik. Fast computation of the wiener index of fasciagraphs and rotagraphs. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 35(5) :834–840, 1995.
- [2] Sandi Klavžar and Aleksander Vesel. Computing graph invariants on rotagraphs using dynamic algorithm approach : the case of  $(2,1)$ -colorings and independence numbers. *Discrete Appl. Math.*, 129(2-3) :449–460, 2003.
- [3] Marilyn Livingston and Quentin F. Stout. Constant time computation of minimum dominating sets. *Congressus Numerantium 105*, pages 116–128, 1994.
- [4] Janez Žerovnik. Deriving formulas for domination numbers of fasciagraphs and rotagraphs. In *FCT '99 : Proceedings of the 12th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory*, pages 559–568, London, UK, 1999. Springer-Verlag.