Arbre couvrant multi-objectif : résolution exacte et $(1+\varepsilon)$-approximation

Renaud Lacour, Daniel Vanderpooten

Université Paris-Dauphine, LAMSADE, F-75016 Paris, France
`{lacour,vdp}@lamsade.dauphine.fr`

Mots-Clés : *arbres couvrants, optimisation combinatoire multi-objectif,* $(1+\varepsilon)$*-approximation*

1 Problématique

Il est désormais connu que de nombreuses versions multi-objectif de problèmes d'optimisation combinatoire, dont la version mono-objectif est résolue en temps polynomial, sont intraitables, au sens où ils admettent un nombre de points non-dominés (ou Pareto-optimaux) qui peut être exponentiel en la taille de l'instance. Outre la recherche d'algorithmes exacts permettant d'énumérer l'ensemble des points non-dominés, il est donc pertinent d'élaborer des algorithmes approximant avec une certaine garantie a priori cet ensemble.

Nous nous sommes intéressés au problème de l'arbre couvrant multi-objectif défini comme suit : étant donné un graphe $G = (V, E)$ connexe et p ($p \geqslant 2$) fonctions de coût $c_j : E \to \mathbb{N}$ également définies pour tout arbre couvrant t de G par $c_j(t) = \sum_{e \in t} c_j(e)$, $j = 1, \ldots, p$, déterminer un sous-ensemble efficace réduit P de l'ensemble T des arbres couvrants de G. Il a été démontré dans [2] que ce problème était intraitable, même dans sa version bi-objectif. Nous en proposons cependant une résolution exacte qui sert de base à une démarche d'approximation.

2 Résolution exacte

Nous définissons d'abord plus précisément l'ensemble de solutions recherché. Soit $\underline{\Delta}$ la relation de dominance définie par $t \underline{\Delta} t'$ si, et seulement si, $c_j(t) \leqslant c_j(t')$, $j = 1, \ldots, p$ pour $t, t' \in T$. Un sous-ensemble efficace réduit est un sous-ensemble $P \subseteq T$ couvrant pour $\underline{\Delta}$ ($\forall t' \in T, \exists t \in P, t \underline{\Delta} t'$) et stable pour $\underline{\Delta}$ ($\forall t, t' \in P, \mathrm{non}(t \underline{\Delta} t')$). À notre connaissance, peu d'approches de résolution valides ont été implémentées, particulièrement pour des problèmes comportant au moins trois objectifs. Des résultats prometteurs ont été obtenus dans [4] dans le cas bi-objectif par une approche de type séparation-évaluation. Celle-ci repose essentiellement sur une estimation de l'ensemble des points non dominés d'un sous-problème donné qui tire profit de la nature bi-dimensionnelle de l'espace des objectifs. Il est en effet aisé dans ce cas particulier d'énumérer l'ensemble des points extrêmes supportés d'un sous-problème. Nous proposons une approche alternative non spécifique au cas bi-objectif. Celle-ci repose sur une énumération des forêts de G selon un ordre préservant la dominance $\underline{\Delta}$ et sur l'utilisation de relations d'élagage complémentaires s'appliquant aux forêts de G. De telles relations d'élagage doivent garantir que toute forêt élaguée ne peut former un arbre efficace. La première relation utilisée, D^S, repose sur la relation $\underline{\Delta}$ et sur une condition relative aux structures des forêts comparées. La seconde relation utilisée, D^*, compare un arbre au point idéal associé au sous-problème induit par une forêt.

3 $(1+\varepsilon)$-approximation

Soit pour tout ε positif ou nul la relation $\underline{\Delta}_\varepsilon$ définie pour $t, t' \in T$ par $t\underline{\Delta}_\varepsilon t'$ si, et seulement si, $c_j(t) \leqslant (1+\varepsilon) \cdot c_j(t')$, $j = 1, \ldots, p$. Une $(1+\varepsilon)$-approximation réduite de T, P_ε, est un sous-ensemble couvrant pour $\underline{\Delta}_\varepsilon$ ($\forall t' \in T, \exists t \in P_\varepsilon, t\underline{\Delta}_\varepsilon t'$) et stable pour $\underline{\Delta}$ ($\forall t, t' \in P_\varepsilon, \text{non}(t\underline{\Delta}t')$). Notre approche repose sur l'élaboration de relations d'élagage approchées basées sur les relations utilisées dans la version exacte. Compte tenu de l'aspect constructif de la procédure d'énumération que nous avons retenue et afin de réaliser des comparaisons approchées entre forêts, nous utilisons comme dans [1] une fonction d'erreur qui permet de gérer la répartition du facteur d'erreur $1+\varepsilon$ tout au long d'une chaîne de dominances.

Nous avons proposé deux versions approchées complémentaires de D^s. L'une intègre directement, dans la condition de dominance, un facteur d'approximation inférieur ou égal à $1+\varepsilon$ dont le choix pallie l'intransitivité de la relation résultante. L'autre repose sur un partitionnement de l'espace des critères en hyper-rectangles, ce qui permet de conserver la propriété de transitivité de la relation qui en résulte (il en découle donc une gestion plus aisée de l'erreur d'approximation). La complémentarité de ces relations approchées tient en premier lieu à des conditions relatives à la taille des forêts comparées. En second lieu, la transitivité de la seconde relation approchée est réalisée au prix d'une condition de dominance qui coïncide dans le pire des cas avec la relation de dominance exacte. Nous avons également approximé la relation D^*.

Des résultats expérimentaux montrant l'intérêt de cette démarche seront présentés et discutés.

4 Perspectives

La relation D^* est très peu discriminante par rapport à la séparation qu'il est possible d'opérer dans le cas bi-objectif. La généralisation à une dimension quelconque de la méthode de séparation mise en œuvre dans [4] pose le problème de l'énumération des points extrêmes non dominés associés à un sous-problème en dimension supérieure à deux. Une récente méthode pour résoudre ce dernier problème, proposée dans [3], semble prometteuse à cet égard.

Références

[1] Cristina Bazgan, Hadrien Hugot, and Daniel Vanderpooten. Implementing an efficient fptas for the 0-1 multi-objective knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, 198(1) :47–56, October 2009.

[2] H. W. Hamacher and G. Ruhe. On spanning tree problems with multiple objectives. *Annals of Operations Research*, 52(4) :209–230, 1994.

[3] A. Przybylski, X. Gandibleux, and M. Ehrgott. A Recursive Algorithm for Finding All Nondominated Extreme Points in the Outcome Set of a Multiobjective Integer Programme. *INFORMS Journal on Computing*, 2009.

[4] Francis Sourd and Olivier Spanjaard. A multi-objective branch-and-bound framework. Application to the bi-objective spanning tree problem. *INFORMS Journal of Computing*, 20(3) :472–484, 2008.