# Optimisation multiagent équitable : une approche utilisant la programmation linéaire mixte

Julien Lesca et Patrice Perny

LIP6-UPMC, 104 avenue du président Kennedy, F-75016 Paris, France
prenom.nom@lip6.fr

**Mots-Clés** : *Optimisation multiagent, équité, affectation, sac-à-dos, programmation linéaire mixte.*

Dans les problèmes de décision ou d'optimisation multiagents, l'équité est souvent au coeur des préoccupations, qu'il s'agisse de répartir des ressources, d'allouer des tâches, de partager des bénéfices ou plus généralement de prendre en compte les préférences individuelles. Bien qu'elle ne soit pas toujours formalisée explicitement, la notion d'équité en optimisation traduit le souci de parvenir à une solution Pareto optimale qui équilibre au mieux la satisfaction ou la dissatisfaction des agents. Dans les problèmes d'optimisation combinatoire multiagents, chaque solution potentielle est caractérisée par un vecteur coût $(x_1, \ldots, x_n)$ (où $x_i$ représente le coût de la solution tel qu'il est perçu par l'agent $i$). Pour décider qu'un vecteur $x$ est préféré à un vecteur $y$ en optimisation équitable, on a besoin de définir une relation de préférence qui intègre à la fois l'objectif de minimisation des coûts et le souci d'équilibrer la solution. Ce sujet a été exploré par les mathématiciens qui ont développé la théorie de la "majorization" [4] et par les économistes qui ont étudié les fondements axiomatiques des mesures d'inégalité (pour des synthèses sur le sujet voir [5, 3]). Ces travaux sur les inégalités ont maintenant un impact important en recherche opérationnelle car de nombreux problèmes d'optimisation nécessitent d'incorporer une idée d'équité dans l'expression de l'objectif global. C'est par exemple le cas de problèmes d'affectation ou de transport (par exemple lorsqu'il s'agit d'attribuer des articles soumis à une conférence à des relecteurs), des problèmes d'ordonnancement avec pénalités lorsque les tâches concernent différents clients que l'on souhaite traiter équitablement, de problèmes de sac-à-dos multiagents, des problèmes de localisation quand plusieurs groupes d'utilisateurs sont concernés par l'utilisation d'un service etc. Des préoccupations similaires sont présentes en IA concernant des problèmes multiagents portant par exemple sur l'allocation de ressources, les problèmes de mariages, le partage de biens indivisibles et ses applications dans les problèmes d'enchères combinatoires [1, 2].

Les problèmes d'optimisation combinatoire multiagents peuvent naturellement se formuler comme des problèmes d'optimisation multicritères dans lesquels chaque fonction objectif considérée représente le point de vue d'un agent. On ne peut cependant pas envisager d'énumérer toutes les solutions Pareto optimales qui sont généralement trop nombreuses et qui ne traduisent pas toutes des comppromis admissibles. L'optimisation d'une simple combinaison linéaire des critères ne convient pas non plus pour rendre compte de l'équité comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 1** *Considérons un problème d'affectation de 8 articles à 4 relecteurs. Chaque relecteur peut se voir effecter entre 0 et 5 articles et chaque article doit être relu par exactement 2 agents. On suppose dans cet exemple que chaque agent a exprimé ses préférences sur la totalité des articles par une fonction coût (dans les plus gros problèmes, on considèrerait que les agents ne s'expriment que sur les articles les plus pertinents pour eux). Les coûts sont donnés dans le tableau suivant :*

| | *papier 1* | *papier 2* | *papier 3* | *papier 4* | *papier 5* | *papier 6* | *papier 7* | *papier 8* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *agent 1* | *6* | *5* | *5* | *6* | *3* | *12* | *10* | *8* |
| *agent 2* | *7* | *5* | *6* | *7* | *5* | *7* | *5* | *9* |
| *agent 3* | *6* | *4* | *11* | *9* | *6* | *6* | *4* | *7* |
| *agent 4* | *14* | *9* | *8* | *10* | *5* | *4* | *5* | *6* |

*Le coût $x_i$ d'une affectation pour un agent i est alors défini comme la somme des coûts des articles qui lui sont assignés. Si on s'intéresse alors à la minimisation du coût total $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, on obtient la solution suivante :*

*agent 1 → papiers 1, 3, 4, 5    agent 3 → papiers 1, 2, 6, 7, 8*
*agent 2 → papiers 2, 3, 4, 7    agent 4 → papiers 5, 6, 8*

*conduisant à une solution dont le vecteur coût est (20, 23, 27, 15) et dont la somme des coûts est 85. On voit très clairement que le vecteur coût est déséquilibré et que l'agent 3 paye un coût significativement plus élevé que les autres. La solution ne semble donc pas très équitable, d'autant plus qu'en la modifiant à la marge, on tombe facilement sur une solution plus équitable :*

*agent 1 → papiers 1, 3, 4, 5    agent 3 → papiers 1, 2, 6, 8*
*agent 2 → papiers 2, 3, 4, 7    agent 4 → papiers 5, 6, 7, 8*

*dont le vecteur coût est (20, 23, 23, 19). On voit cette fois-ci que le vecteur coût est plus équilibré et ce pour une faible augmentation du coût global (qui n'augmente que d'une unité). En fait cette solution est celle qui minimise le coût de l'agent le moins satisfait. Ce critère n'est cependant pas toujours satisfaisant car il ne tient compte que de l'agent le moins bien servi. Ceci explique qu'on envisage souvent des critères plus sophistiqués qui tiennent compte de la totalité des agents.*

On doit donc travailler avec des fonctions d'agrégation non-linéaires mais leur optimisation est plus complexe, notamment sur un domaine combinatoire. L'objet de cet article est d'étudier comment on peut exploiter les modèles issus de la littérature économique (mesures d'inégalités) ou de l'optimisation multicritère (recherche de compromis) pour l'optimisation combinatoire équitable. Plus précisément, on considèrera des modèles d'évaluation tels que le max augmenté, les indices S-Gini et plus généralement les moyennes pondérées ordonnées (OWA), ainsi que l'intégrale de Choquet et on étudiera l'optimisation de tels critères pour résoudre les versions multiagents de problèmes d'affectation, de transport et de sac-à-dos. Dans chaque cas considéré, nous avons à résoudre un problème de minimisation d'une fonction non-linéaire convexe sur un domaine combinatoire. Après avoir étudié la complexité de ces problèmes, nous montrons qu'on peut les reformuler comme des problèmes d'optimisation linéaires en variables mixtes. Pour tester l'efficacité de ces reformulations nous présentons les résultats obtenus avec CPLEX sur des instances aléatoires de différentes tailles. Nous traitons en particulier des problèmes de partage de biens indivisibles, des problèmes d'affectation d'articles à des relecteurs et des problèmes de sac-à-dos multiagents.

## Références

[1] S. Bouveret and J. Lang. Efficiency and envy-freeness in fair division of indivisible goods. In *Proceedings of IJCAI*, 2005.

[2] Sylvain Bouveret and Michel Lemaître. Computing leximin-optimal solutions in constraint networks. *Artificial Intelligence*, 173(2) :343–364, 2009.

[3] Th. Gajdos. Les fondements axiomatiques de la mesure normative des inégalités. *Revue d'Economie Politique*, 5 :683–720, 2001.

[4] W. Marshall and I. Olkin. *Inequalities : Theory of Majorization and its Applications.* Academic Press, London, 1979.

[5] A. Sen. *On economic inequality.* Clarendon Press, expanded edition edition, 1997.