Variante du knapsack contraint : méthode exacte

Mhand HIFI[1] et Hedi Mhalla[1]

Université de Picardie Jules Verne ; Laboratoire MIS ; Equipe GOC, Axe ODR
33 rue Saint Leu, 80039 Amiens, France
{mhand.hifi, hedi.mhalla}@u-picardie.fr

Mots-Clés : *Knapsack, optimisation combinatoire.*

1 Introduction

Nous étudions le problème M^3KP à variables binaires. Ce problème est un des problèmes en $max-min$ et il dispose d'un certain nombre d'applications dans le domaine du commerce, le transport, les communications, l'allocation de ressources (c.f., Yamada [4]). En particulier, différents auteurs avaient étudié des variantes du problème d'allocation max-min (ou min-max) (Yamada et Futakawa [5], Hifi *et al.* [3], Du et Pardalos [1]). Cependant on trouve peu d'articles de la littérature qui traitent le M^3KP à variables binaires. En effet, nous pouvons citer l'article de Yamada [4], qui dans ses travaux propose une résolution approchée ainsi qu'une résolution optimale du problème. La résolution approchée permet d'aborder les instances de grande taille, en revanche la résolution exacte se limite principalement aux instances de petite taille et faiblement corrélées.

2 Le problème

Dans le M^3KP à variables binaires, chaque objet j est associé à un profit p_j et un poids w_j. On dispose d'un ensemble $\mathcal{N}$ de n objets et de m classes ayant chacune une capacité $c_i, i = 1, ..., m$. L'objectif de ce problème est de déterminer le sous-ensemble d'objets à retenir dans chaque knapsack (ou classe) dont la capacité a pour valeur $c_i, i = 1, ..., m$, sachant qu'un élément ne peut être retenu que dans une seule classe à la fois. Ce sous-ensemble est choisi de manière à maximiser la valeur de la fonction objectif réalisant le minimum par rapport à l'ensemble de toutes les classes.
Soit x_{ij} la variable de décision où $x_{ij} = 1$ si l'objet j est pris dans le sac i, et $x_{ij} = 0$ sinon. Alors le problème M^3KP peut être formulé comme suit :

$$M^3KP \begin{cases} \max \quad \min\limits_{1\leq i\leq m} & \left\{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_{ij}\right\} \\ \text{s.t.} & \sum\limits_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq c_i \quad i = 1, ..., m \\ & \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad j = 1, ..., n \\ & x_j \in \{0, 1\}, \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, n, \ \forall i, j. \end{cases}$$

Lors de l'étude du problème M^3KP, nous considérons les hypothéses suivantes : (i) les valeurs de w_j, p_j , pour $j = 1, ..., n$, et c_i, pour $i = 1, ..., m$, sont des entiers poisitifs, (ii) les éléments sont classés selon l'ordre décroissant du rapport profit sur poids, i.e., $p_1/w_1 \geq p_2/w_2 \geq ... \geq p_n/w_n$ et, (iii) les classes respectent l'ordre croissant de leurs capacités, i.e., $c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_m$.

Le problème étudié peut être considéré comme une variante du fameux problème du "knapsack". Ce dernier nous servira de point d'appui pour la construction des bornes inférieures et supérieures pour le M^3KP. Dans un premier temps, nous commençon par la réduction du problème M^3KP au problème "knapsack", que l'on notera $KP_{Aux}(c) = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} p_j y_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} w_j y_j \leq \sum_{i=1}^{m} c_i,\ y_j \in \{0,1\},\ j = 1, ..., n \right\}$, et qui sera considéré comme un problème auxiliaire pour le M^3KP. Dans un deuxième temps, la solution de ce problème auxiliaire nous servira de déterminer à travers des résultats thèoriques une borne supérieure ainsi qu'une autre borne inférieure de départ pour le M^3KP.

3 Une méthode exacte

Nous proposons une méthode exacte qui s'appuie sur la détermination d'un (ou plusieurs) intervalle(s) de recherche associé(s) à une procédure de séparation et d'évaluation. Le principe de la méthode s'appuie sur les phases suivantes :

1. La réduction de l'*espace de recherche initial* ;
2. Le choix de la *classe favorite* ;
3. La détermination de l'*intervalle de recherche de départ* et,
4. L'application de la *stratégie en profondeur d'abord*.

Les étapes (2)-(4) sont réitérées jusqu'à l'obtention de la solution optimale. Le principe de la méthode consiste à construire un intervalle de recherche et d'appliquer une procédure par séparation et évaluation (Horowitz et Sahni[2]) afin de déterminer la solution optimale −si une telle solution existe− dans cet intervalle. L'intervalle de départ est composé des limites inférieure et supérieure définies à partir de la solution optimale du problème auxiliaire. Si la solution optimale n'est pas localisée dans cet intervalle, alors une décrémentation est effectuée sur cet intervalle et la procédure par séparation et évaluation est relancée. Ce processus, combiné avec des stratégies de fixation agressive, est réitéré jusqu'à l'otention d'une solution optimale.

Références

[1] Du D-Z, Pardalos. Minmax and Applications, *Boston : Kluwer Academic Publisher,* 1995.

[2] Horowitz E., Sahni S. *Computing partitions with applications to the knapsack problem, Journal of ACM,* 21 :277-292, 1974.

[3] Hifi M., MHalla H., Sadfi S. An exact algorithm for the knapsack sharing problem, *Computers and Operations Research,* vol. 32, No 5, pp. 1311-1324, 2005.

[4] Yamada T. Max-min optimization of the multiple knapsack problem : an implicit enumeration approch, E. Kozan, A. Ohuchi eds., *"Operations Research/Management Science at Work : Applying Theory in the Asia Pacific Region", Kluwer Academic Publishers,* 351-362, 2002.

[5] Yamada T., Futakawa M., Kataoka S. Some exact algorithms for the knapsack sharing problem, *European Journal of Operational Research,* 106 :177-183.J, 1998.