Prix de l'Anarchie et Equilibrage de Charge Non-Coopératif

U. Ayesta[1,2], O. Brun[1], B.J. Prabhu[1]

[1] CNRS-LAAS ; Université de Toulouse ; 7, avenue du Colonel Roche, F-31077 Toulouse, France
{urtzi,brun,bala}@laas.fr
[2] IKERBASQUE, BCAM - Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao, Spain
ayesta@bcamath.org

Introduction. Les fermes de serveurs apparaissent dans de nombreux domaines applicatifs : industrie des e-services, systèmes de base de données, grilles de calcul, etc. Un des problèmes fondamentaux dans ce contexte concerne le routage optimal des tâches. Le problème consiste à déterminer la politique de routage du dispatcher qui permet d'optimiser un certain critère de performance, tel que par exemple le temps de traitement moyen des tâches. Cette politique peut être vue comme un optimum social dans le sens où elle minimise le temps de traitement moyen de *toutes* les tâches. En pratique, il peut toutefois arriver qu'une mise en œuvre centralisé ne soit pas réalisable pour des raisons de complexité ou de scalabilité. Dans ce cas, le concepteur du système va certainement devoir se rabattre sur une mise en œuvre distribuée dans laquelle plusieurs dispatchers sont utilisés. Le passage d'une architecture centralisée (cf. Figure 1) à une architecture décentralisée (cf. Figure 2) a toutefois un impact important sur la nature du problème. En effet, chaque dispatcher cherchant à minimiser le temps de traitement des tâches qu'il route lui même, l'architecture distribuée implique un jeu non-coopératif entre les dispatchers.

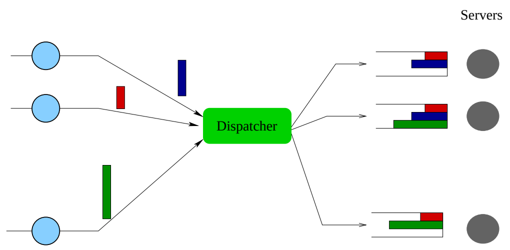

FIGURE 1 – Architecture centralisée.

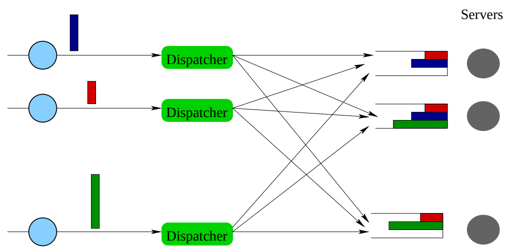

FIGURE 2 – Architecture décentralisée.

Puisque chaque dispatcher réalise une optimisation individuelle pour ses propres tâches, il est clair que la performance globale du système dans l'architecture décentralisée sera pire que dans l'architecture centralisée. Il est alors important que le gain en scalabilité ne soit pas obtenu au détriment des performances. La question qui nous intéresse dans cet article est alors la suivante : quelles garanties de performance peut on apporter dans le cas d'un routage décentralisé ?

Modèle. Soit $\mathcal{C} = \{1, \ldots, K\}$ l'ensemble des dispatchers et $\mathcal{S} = \{1, \ldots, S\}$ l'ensemble des serveurs. Le serveur $j \in \mathcal{S}$ a une capacité r_j, et un coût c_j par unité de temps doit être payé pour chaque tâche traitée sur ce serveur. Soient $\mathbf{r} = (r_j)_{j\in\mathcal{S}}$ et $\mathbf{c} = (c_j)_{j\in\mathcal{S}}$ les vecteurs de capacités et de côuts. On suppose que la politique d'ordonnancement dans les serveurs est Processor-Sharing. Les tâches de la classe $i \in \mathcal{C}$ arrivent au système selon un processus de Poisson de taux λ_i et les temps de service suivent une loi générale. On suppose que $\sum_{i\in\mathcal{C}} \lambda_i = \overline{\lambda}$. Soit $\mathbf{x}_i = (x_{i,j})_{j\in\mathcal{S}}$ la stratégie de routage du dispatcher i, où $x_{i,j}$ est la quantité de trafic envoyé vers le serveur j. La stratégie de routage doit satisfaire $\sum_{j\in\mathcal{S}} x_{i,j} = \lambda_i$, $i \in \mathcal{C}$.

Architecture Décentralisée. Le dispatcher i cherche une stratégie de routage qui minimise le temps de traitement moyen de ses tâches. Ce problème d'optimisation, qui dépend de la stratégie des autres dispatchers, peut être formulé ainsi : $\underset{\mathbf{x}_i}{\text{minimize}}\; T_i(\mathbf{x}) = \sum_{j\in\mathcal{S}} c_j \frac{x_{i,j}}{r_j - \sum_{k\in\mathcal{C}} x_{k,j}}$.

On montre qu'il existe un unique point $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)_{i\in\mathcal{C}}$, appelé équilibre de Nash, dont aucun dispatcher n'a intérêt à dévier unilatéralement dans la mesure où cela ne lui permettra pas d'améliorer les performances perçues par les tâches qu'il route. Autrement dit, $\mathbf{x}$ est un équilibre de Nash si $\mathbf{x}_i = \arg\min_{\mathbf{z}\in\mathcal{X}_i} T_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_K), \quad \forall i \in \mathcal{C}$. La performance globale du système est alors donnée par

$$D_K(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}, \mathbf{c}) = \sum_{i\in\mathcal{C}} T_i(\mathbf{x}) = \sum_{j\in\mathcal{S}} c_j \frac{\sum_{i\in\mathcal{C}} x_{i,j}}{r_j - \sum_{k\in\mathcal{C}} x_{k,j}}.$$

Architecture Centralisée. La mise en œuvre centralisée correspond au cas où il y a un seul dispatcher qui route tout le trafic $\bar{\lambda}$. Dans ce cas, la performance globale est donnée par $D_1(\bar{\lambda}, \mathbf{r}, \mathbf{c})$

Prix de l'Anarchie. Ce concept, introduit par Koutsoupias et Papadimitriou [2], est en fait une mesure de l'inefficacité de la solution distribuée. Il est défini comme la valeur maximale que peut prendre le ratio entre le coût global à l'équilibre de Nash et le coût global à l'optimum social. Pour notre problème le prix de l'anarchie est défini par $PoA(K) = \sup_{\boldsymbol{\lambda},\mathbf{r},\mathbf{c}} \frac{D_K(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{r},\mathbf{c})}{D_1(\bar{\lambda},\mathbf{r},\mathbf{c})}$.

Résultats Principaux. Nous présentons ici un resumé des principaux résultats (pour plus de détails, cf. [1]). Le premier théorème montre que, si l'on fixe le trafic total offert au système, le pire des cas correspond au jeu symétrique. En d'autres termes, l'équilibre de Nash offrant les plus mauvaises performances globales est obtenu quand chaque joueur route exactement la même quantité de trafic.

Théorème 1. $\sup_{\boldsymbol{\lambda},\mathbf{r},\mathbf{c}} D_K(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}, \mathbf{c}) = \sup_{\mathbf{r},\mathbf{c}} D_K(\boldsymbol{\lambda}^=, \mathbf{r}, \mathbf{c})$. où $\boldsymbol{\lambda}^= = \left(\bar{\lambda}/K, \ldots, \bar{\lambda}/K\right)$.

Le deuxième résultat montre que le PoA est de l'ordre de $\sqrt{K}$ indépendamment du nombre de serveurs. En particulier cela implique qu'il reste borné tant que le nombre de dispatchers est fini.

Théorème 2. Pour un système avec au moins deux serveurs, $\frac{K}{2\sqrt{K}-1} \leq PoA(K) \leq \sqrt{K}$.

Références

[1] U. Ayesta, O. Brun, and B. J. Prabhu. Price of anarchy in non-cooperative server-farms, 2009. LAAS Research Report. Available at http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00416123.

[2] E. Koutsoupias and C.H. Papadimitriou. Worst-case equilibria. In *Proceedings of STACS 1999*, 1999.