

Approximation du voyageur de commerce bi-containers

Sophie Toulouse¹

LIPN - UMR CNRS 7030 ; Université Paris 13 ; 99 avenue J.-B. Clément, F-93430 Villetaneuse, France.
sophie.toulouse@lipn.univ-paris13.fr

Mots-Clés : *Voyageur de commerce, approximation polynomiale, ordonnancement*

1 Présentation du problème

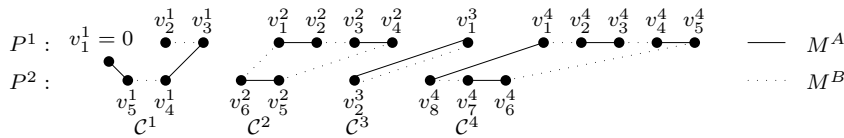
Le problème du voyageur de commerce *bi-containers*, 2STSP, considère n colis qui sont à collecter dans une ville A , puis à livrer dans une autre ville B . Le tour de collecte est réalisé par un véhicule basé sur le dépôt de la ville A et qui stocke durant sa collecte les colis dans 2 containers. Ces containers sont ensuite transportés vers la ville B où un nouveau véhicule, basé sur le dépôt de la ville, opère la livraison. Les containers sont soumis à des contraintes LIFO “*Last In First Out*” qui limitent les couples de tours compatibles : les *premiers colis livrés* dans la ville B doivent correspondre *aux derniers colis collectés* dans la ville A . Ce problème se modélise par un couple (I^A, I^B) d’instances du problème de voyageur de commerce, où $I^\alpha = (G^\alpha, d^\alpha)$ et $d^\alpha : E(G^\alpha) \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \{A, B\}$. Les sommets des deux graphes représentent les dépôts, ainsi que les lieux de collecte et de livraison des n colis ; on considère alors $V^A \equiv V^B \equiv V = \{0, \dots, n\}$, où l’indice 0 se réfère au dépôt, tandis tout indice i de 1 à n se réfère aux lieux de collecte ou de livraison du colis i . Une solution de ce problème est la donnée conjointe d’un couple (T^A, T^B) de tours sur I^A, I^B et d’un ordonnancement (P^1, P^2) des colis dans les deux containers qui leur soit compatible. Précisément, $P^1 = (i_1^1, \dots, i_{q_1}^1)$ et $P^2 = (i_1^2, \dots, i_{q_2}^2)$ définissent un ordonnancement valide *ssi* :

1. $\{i_1^1, \dots, i_{q_1}^1\} \cap \{i_1^2, \dots, i_{q_2}^2\} = \emptyset \vee \{i_1^1, \dots, i_{q_1}^1\} \cup \{i_1^2, \dots, i_{q_2}^2\} = \{1, \dots, n\}$
2. $\forall j = 1, \dots, n$, j est collecté (*resp.*, livré) *avant* (*resp.*, après) j' dans T^A (*resp.*, dans T^B) *ssi* j est empilé *avant* j' dans le même container P^β pour un $\beta \in \{1, 2\}$, ou j et j' sont empilés dans deux containers distincts.

La valeur d’une solution (T^A, T^B, P^1, P^2) est la somme $d^A(T^A) + d^B(T^B)$ des distances des deux tournées ; une solution est optimale si elle est de distance optimale pour le sens à optimiser. Par la suite, on se limitera le plus souvent au cas de graphes complets ($G^\alpha \equiv K_{n+1}$, $\forall \alpha \in \{A, B\}$) et symétriques ($d^\alpha(u, v) = d^\alpha(v, u)$, $\forall (u, v) \in E(G^\alpha)$, $\forall \alpha \in \{A, B\}$). Les instances asymétriques, métriques, bivaluées seront respectivement désignées par A(S)TSP, Metric(S)TSP et (S)TSP12. Enfin, la généralisation de 2STSP à un nombre quelconque de containers sera notée STSP.

2 Approximabilité de STSP

Proposition 1 *Max(A)STSP, Min(A)STSP12* \in **APX**. *MaxMetricSTSP, MaxMetricASTSP* \in **MaxSNP** – **hard**.
MaxSTSP12 \in **APX** – **hard**.

FIGURE 1 – Illustration of our algorithm for odd values of n : the stacking procedure.

Preuve : Il existe des réductions triviales de (A)STSP vers (A)TSP (cas des graphes complets) et de (A)STSP vers (A)TSP (cas de graphes généraux). De (A)STSP vers (A)TSP, la réduction transporte un rapport ρ sur MaxTSP, MinTSP ab et MaxTSP ab en un rapport $\rho/2$, $\rho/2 + (a/2b)$ et $\rho/2 + (b/2a)$ sur MaxSTSP, MinSTSP ab et MaxSTSP ab , respectivement ; on en déduit que MaxSTSP, MaxMetricSTSP, MinSTSP12, MaxASTSP, MaxMetricASTSP, MinASTSP12 sont respectivement $61/162$ [5], $7/16-o(1)$ [4], $11/7$ [3], $5/16$ [6], $27/70$ [4], $41/24$ [8] standard approximables. La seconde réduction transporte à l'identique un rapport de STSP vers TSP ; on en déduit que MinSTSP n'est $2^{p(n+1)}$ approximable pour aucun polynôme p (à moins que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$), que MaxMetricSTSP, MaxMetricASTSP (*resp.*, Max $k(\cdot)$ STSP12) sont **MaxSNP**-difficiles (*resp.*, **APX** – **hard**), [2], (*resp.*, [7]). \square

Théorème 1 *MaxSTSP, MaxSTSP12 et MinSTSP12 sont respectivement $1/2$, $3/4$ et $3/2$ approximables.*

Preuve : Nous proposons un algorithme basé sur la détermination de couplages optimaux sur I^A et I^B : une paire de couplages optimaux apporte conjointement l'*optimalité* (par comparaison à une paire de tours optimaux) et la *réalisabilité* (un couple de couplages admet toujours un ordonnancement compatible). Notre algorithme fonctionne en 4 étapes :

1. Déterminer un couple (M^A, M^B) de couplages optimaux sur I^A et I^B .
2. Déterminer les composantes connexes du multigraphe $H = (V, M^A \cup M^B)$.
3. Construire un ordonnancement $\mathcal{P} = (P^1, P^2)$ en considérant itérativement les composantes connexes de H , en commençant par la composante qui contient le dépôt.
4. Déterminer le meilleur couple (T^A, T^B) de tours compatibles avec \mathcal{P} (ce qui peut se faire en temps $\mathcal{O}((n+1)^2)$, [1]).

La troisième étape de l'algorithme dépend du contexte. Si n est impair (*ssi* $|V|$ est pair), les composantes connexes $\mathcal{C}^1, \dots, \mathcal{C}^p$ de H sont toutes de la forme $\mathcal{C}^i = \{v_1^1, \dots, v_{q^i}^i, v_1^i\}$, où $q^i \geq 2$. Supposons que $0 = v_1^1 \in \mathcal{C}^1$, l'ordonnancement approché sera de la forme (voir Figure 1 pour une illustration) :

$$\begin{aligned} P^1 &= ((v_2^1, \dots, v_{t^1}^1), (v_1^2, \dots, v_{t^2}^2), \dots, (v_1^p, \dots, v_{t^p}^p)) \\ P^2 &= ((v_{q^1}^1, \dots, v_{t^1=1}^1), (v_{q^2}^2, \dots, v_{t^2+1}^2), \dots, (v_{q^p}^p, \dots, v_{t^p+1}^p)) \end{aligned}$$

Où $t^1 \in \{2, \dots, q^1 - 1\}$ et $t^i \in \{1, \dots, q^i - 1\}$, $\forall i = 2, \dots, p$. Il est assez aisé de voir que M^A comme M^B sont compatibles avec \mathcal{P} . Si n est pair, il faut considérer une arête supplémentaire entre deux composantes connexes de H si $p \geq 2$, sur \mathcal{C}^1 sinon. Dans les deux cas, l'intuition est que le couplage M^α apporte sur I^α "une moitié de tour optimal", pour $\alpha \in \{A, B\}$. \square

Références

- [1] S. Toulouse, R. Wolfer Calvo. On the complexity of the multiple stack TSP, k STSP. *TAMC 2009*, LNCS 5532 :360-369, 2009.
- [2] A. Barvinok, D. S. Johnson, G. J. Woeginger, R. Woodroffe. Finding Maximum Length Tours Under Polyhedral Norms. *IPCO VI*, LNCS 1412 :195–201, 1998.

- [3] P. Berman, M. Karpinski. 8/7-approximation algorithm for (1,2)-tsp. *SODA 2006*, ACM 641-648, 2006.
- [4] Z.-Z. Chen, T. Nagoya. Improved Approximation Algorithms for Metric Max TSP. *J. of Combinatorial Optimization*, 1 :321-336, 2007.
- [5] Z.-Z. Chen, Y. Okamoto, L. Wang. Improved deterministic approximation algorithms for Max TSP. *Inform. Proc. Letters*, 95(2) :333-342, 2005.
- [6] M. Lewenstein, M. Sviridenko. Approximating asymmetric maximum TSP. *SODA 2003*, SIAM 646-654, 2003.
- [7] C.H. Papadimitriou, M. Yannakakis. The traveling salesman problem with distances one and two. *Mathematics of Operations Research*, 18 :1-11, 1993.
- [8] S. Vishwanathan. An approximation algorithm for the asymmetric travelling salesman problem with distances one and two. *Inform. Proc. Letters*, 44 :297-302, 1992.