Une nouvelle approche locale pour résoudre un problème de complémentarité non linéaire

Mahdi Moeini[1], Hoai An Le Thi[1], Joaquim Judice[2]

[1] Laboratoire d'Informatique Théorique et Appliquée (LITA),
UFR MIM, Université Paul Verlaine - Metz, Ile du Saulcy - 57045 Metz Cedex, France
moeini@univ-metz.fr
lethi@univ-metz.fr
[2] CMUC, Department of Mathematics, University of Coimbra, 3001-454 Coimbra, Portugal.
Joaquim.Judice@co.it.pt

Mots-Clés : *Programmation DC, DCA, Problèmes de complémentarité non linéaire.*

1 Introduction

Nous étudions un problème de complémentarité dit Eigenvalue Complementarity Problem (EiCP). Ce problème est formulé comme un problème d'optimisation non linéaire. Nous nous intéressons à la résolution efficace de ce problème lorsque la dimension du problème est très grande. Une approche locale basée sur la programmation DC est utilisée pour résoudre ce problème et les solutions fournies par notre approche sont comparées avec celles d'autres méthodes. Les résultats numériques montrent la supériorité de notre approche.

2 Présentation du problème et de la méthode de résolution

Le calcul des valeurs propre d'une matrice est très important en mathématiques appliquées, en physique et en ingénierie. En langage mathématique, les valeurs propres d'une matrice carrée comme A sont les solutions de l'équation $det(A - \lambda I) = 0$. Lorsque la dimension de la matrice A est très grande, une méthode efficace pour trouver les valeurs propres de A consiste en l'utilisation des méthodes d'optimisation.

Il existe certains problèmes qui sont liés au calcul de valeurs propres. Le problème de complémentarité de valeurs propres (the Eigenvalue Complementarity Problem (EiCP)) est l'un de ces problèmes. Pour deux matrices A et B, EiCP s'écrit sous forme suivante :

$$(EiCP): \quad \text{Trouver } \; \lambda > 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \; \text{ tel que } \; = \begin{cases} \mathbf{w} = (\lambda B - A)\mathbf{x}, \\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{w}^T\mathbf{x} = 0, \langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle = 1. \end{cases}$$

Nous supposons que A et B sont deux matrices symétriques et B est une matrice définie positive.

Soit $\phi(\mathbf{x})$ une fonction différentiable et $\mathbf{e}^T = (1, \ldots, 1)$. Pour certains choix de la fonction $\phi(\mathbf{x})$, EiCP peut se rendre sous forme d'un problème d'optimisation non linéaire [2] :

$$\min \left\{ \phi(\mathbf{x}) : \ \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}. \tag{1}$$

Pour $\phi(\mathbf{x}) := -\frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T B \mathbf{x}}$ (où $\frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T B \mathbf{x}}$ est le *quotient de Rayleigh*) et $\phi(\mathbf{x}) := ln(\mathbf{x}^T B \mathbf{x}) - ln(\mathbf{x}^T A \mathbf{x})$ (où la matrice A doit être une matrice strictement copositive) chaque point stationnaire $\mathbf{x}^*$ de (1) est une solution de EiCP et $\lambda^* = \frac{\mathbf{x}^{*T} A \mathbf{x}^*}{\mathbf{x}^{*T} B \mathbf{x}^*}$.

Lorsque $\phi(\mathbf{x}) := -\frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T B \mathbf{x}}$ ou $\phi(\mathbf{x}) := ln(\mathbf{x}^T B \mathbf{x}) - ln(\mathbf{x}^T A \mathbf{x})$, le problème (1) est en général un problème NP-Complet, par conséquent très difficile à résoudre de manière efficace, surtout lorsque la dimension du problème est très grande. Le but de ce travail est de proposer un algorithme efficace pour résoudre EiCP lorsque $\phi(\mathbf{x}) := -\frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T B \mathbf{x}}$ ou $\phi(\mathbf{x}) := ln(\mathbf{x}^T B \mathbf{x}) - ln(\mathbf{x}^T A \mathbf{x})$.

Nous avons utilisé une approche locale issue de la programmation DC. Cette approche est appelée DCA (DC Algorithm) et elle a été introduite par Pham Dinh Tao en 1986 et a été largement développée et utilisée par Le Thi Hoai An et Pham Dinh Tao depuis 1994 (voir [1] pour les références et plus de détails). Nous avons choisi DCA pour résoudre EiCP car c'est une méthode performante de résolution efficace de problèmes de grande taille.

En ce qui concerne la résolution de (1), nous l'avons rendu sous forme d'un programme DC (une fonction indicatrice a été utilisée pour prendre en compte les contraintes $\mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$). Ensuite l'algorithme DCA a été appliqué pour résoudre la nouvelle formulation du EiCP.

Un programme DC est de forme suivante :

$$(P_{dc}) \qquad \inf\{F_p(x) := g(x) - h(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n\},$$

où g, h sont deux fonctions convexes. (P_{dc}) est le programme DC primal et son dual est défini par :

$$(D_{dc}) \qquad \inf\{F_d(y) := h^*(y) - g^*(y) \ : \ y \in \mathbb{R}^n\},$$

où $g^*(.)$ et $h^*(.)$ sont les fonctions conjuguées de $g(.)$ et $h(.)$, respectivement [1].

La méthode DCA est utilisée pour résoudre les programmes DC. En effet, DCA est une méthode de descente basée sur la condition d'optimalité locale et la dualité DC. En fait, DCA construit deux suites $\{x^k\}$ et $\{y^k\}$ via (2) telles que les limites de ces deux suites soient les solutions optimales des programmes primal et dual, respectivement :

$$\text{Pour un } x^0 \text{ donné et à l'itération } k \text{ calculer : } y^k \in \partial h(x^k) \to x^{k+1} \in \partial g^*(y^k), \tag{2}$$

l'algorithme s'arrête selon un test d'arrêt.

Cet algorithme a été appliqué pour résoudre (1). Les résultats fournis par DCA ont été comparés avec les résultats obtenus par d'autres méthodes existantes. D'après les résultats numériques, notre approche a une meilleure performance par rapport aux autres méthodes.

Références

[1] H.A. Le Thi, T. Pham Dinh, The DC (difference of convex functions) Programming and DCA revisited with DC models of real world non convex optimization problems, *Annals of Operations Research*, 133:23-46, 2005.

[2] M. Queiroz, J. Judice, C. Humes, The Symmetric Eigenvalue Complementarity Problem, *Mathematics of Computation*, 73 (248):1849-1863, 2004.