Complexité de la coloration avec préférences dans les graphes de conflit bipartis

Benoît Robillard

Laboratoire CEDRIC, 292 rue Saint-Martin, 75 141 Paris cedex 03
robillard@ensiie.fr

Mots-Clés : *Coloration ; complexité ; graphes bipartis.*

1 Introduction

Le problème de K-coloration avec préférences (K-CPM) est une généralisation du problème de K-coloration classique permettant de modéliser que deux sommets voudraient, si possible, se voir assignés la même couleur. Ce problème est évidemment NP-complet pour un nombre de couleurs $K \geq 3$. Des applications réelles, telles que l'allocation de registres d'un compilateur, passent par la résolution de la K-coloration avec préférences dans des graphes triangulés, dont on sait qu'ils sont K-colorables [Cha82]. Le problème demeure NP-complet dans de tels graphes, mais nombre de processus de résolution se focalisent sur la colorabilité du graphe, plutôt que sur les préférences. Nous avons établi une série de résultats de complexité pour ce problème. Il en résulte en particulier que le K-CPM reste NP-complet si les conflits forment un graphe biparti (donc 2-colorable), et ce pour tout $K \geq 2$. Ainsi, délaisser les préférences au profit de la colorabilité du graphe apparaît comme trop approximatif.

2 Le problème

Le graphe à colorier est un *graphe d'interférences* $G = (S, I, P)$, où S, I et P sont respectivement l'ensemble des sommets, l'ensemble des arêtes d'interférence est I et l'ensemble des arêtes de préférence est P. De plus, les graphes formés par S et I d'une part et S et P d'autre part sont respectivement appelés graphe de conflit et graphe de préférences de G. Un poids peut être associé à chaque arête de préférence afin de moduler la magnitude de la préférence entre deux sommets.

Le problème de coloration avec préférences, noté K-CPM, consiste à trouver une K-coloration du graphe de conflit de G qui minimise la somme des poids des arêtes de préférences ayant des extremités de couleurs différentes. Un exemple de 3-coloration avec préférences optimale est donné Fig. 1. Il est facile de se convaincre de l'optimalité de la solution en remarquant que les (A, F) et (F, B) ne peuvent être satisfaites simultanément.

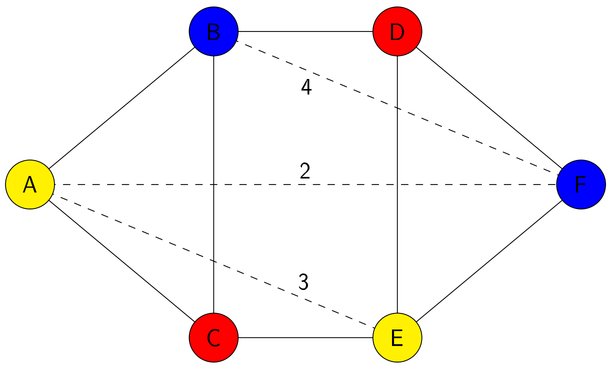

FIG. 1 – Un exemple d'instance résolue de 3-CPM. Les arêtes en pointillé sont les préférences, les arêtes pleines sont les interférences.

3 Complexité

K-CPM est ostensiblement NP-complet. Il généralise en effet le problème de K-coloration. Il reste NP-complet si le graphe de conflit est triangulé [BDR07]. Nous prouvons ici qu'il demeure NP-complet dans de nombreux cas quand le graphe de conflit est biparti. Il en résulte que les méthodes de résolution s'appuyant sur la colorabilité du graphe sont loin d'être suffisantes pour résoudre efficacement ce problème.

Plus précisément, nous avons prouvé les théorèmes suivants :

Théorème 1 *K-CPM est NP-complet pour $K \geq 3$ couleurs même si le graphe de conflit est un arbre et que le graphe de préférences est biparti et non pondéré*

Théorème 2 2-*CPM est polynomial si le graphe de conflit est biparti connexe*

Théorème 3 2-*CPM est NP-complet même si le graphe de conflit et le graphe de préférence sont bipartis*

Références

[BDR07] Florent Bouchez, Alain Darte, and Fabrice Rastello. On the complexity of register coalescing. In *International symposium on code generation and optimization (cgo'07)*, San Jose, USA, mar 2007. IEEE Computer Society Press. Best paper award.

[Cha82] G J Chaitin. Register allocation and spilling via graph coloring. *Symposium on Compiler Construction*, 17(6) :98 – 105, 1982.